به نام خدا   فصل ۱ مقدمه :

تعریف ۱: تابع $y : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. یک رابطه ریاضی بین

x ، y ، y' و سایر مشتقات y یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود (ODE)

به عنوان مثال:

$$y' + y = x \qquad (1)$$

$$y^2 + y y'' = 0 \qquad (2)$$

هر دو معادله دیفرانسیل هستند.

معادله سخت که را اندرساده می‌کنیم یا به چیزی رسیم درباره.

تعریف ۲: اگر ضریب y ، y' ، ... در معادله‌ی دیفرانسیل فقط تابع x باشد معادله را خطی و در غیر اینصورت غیرخطی می‌گوییم. ۱) مثلاً $y^{2} = yxy$ پس غیرخطی است. ۲) منظور کل ضرایب است نه این که تنها تابع y داشت ...

در مثال بالا معادله‌ی (۱) خطی و (۲) غیرخطی هستند. به عنوان یک مثال دیگر $x^{3} y' + \sin x\, y''$ خطی است.

تعریف ۳) اگر جمله‌ی مستقل از y ، y' ، ... در معادله تابعی غیرصفری از x باشد معادله را ناهمگن و اگر این جمله برابر صفر باشد معادله را همگن می‌گوییم. معادله ۱: ناهمگن است، معادله ۲ همگن

تعریف ۴) معادله‌ی (۱) ناهمگن و معادله‌ی (۲) همگن است.

مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل: بزرگترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله را مرتبه آن می‌گوییم. معادلات (۱) و (۲) به ترتیب مرتبه اول و دوم هستند.

تعریف ۵) اگر مقدار جواب (یا مشتق جواب) در یک یا چند نقطه معلوم باشد به رابطه‌ی ریاضی که این مقادیر را بیان کند، شرط اولیه می‌گوییم. به عنوان نمونه $y(0)=1$ یا $y'(1)=0$ نمونه‌هایی از شرط‌های اولیه که کاربردی هستند.

توجه: برای محاسبه‌ی جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به طور یکتا، داشتن n شرط اولیه

ضروری است.

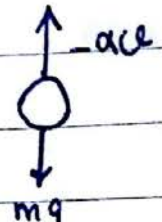
مثال : تابع y که مشتق خود را برابر

$$y' - y = 0 \quad , \quad y(0) = 2$$

$$\hookrightarrow y = ce^{x} \Rightarrow y(0) = c \times 1 = 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y(x) = 2e^{x}$$

$y(0) = 2$

۱) مدل‌سازی



$$mg - \gamma v = ma$$

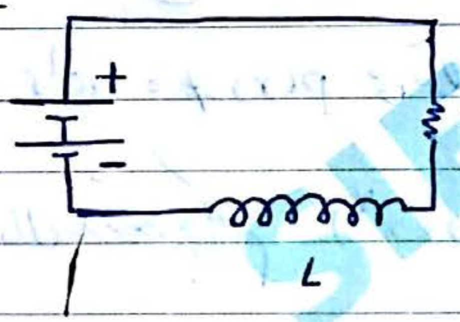
$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow m v'(t) + \gamma v(t) = mg$$

۲) طی یک واحد زمان تعداد باکتری‌ها ٪۱۰ اضافه می‌شود.
k باکتری از بین می‌روند.

$n(t)$ تعداد باکتری‌ها در زمان t : ناهمگن - مرتبه اول خطی

$$\frac{dn}{dt} = 0{,}1n - k$$

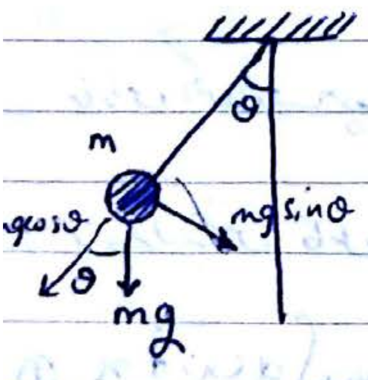
۳)



$$v = Ri + L\frac{di}{dt} \qquad i(t)$$

ناهمگن - مرتبه اول - خطی

۴) نوسان



$$ma + mg\sin\theta = 0$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$L \approx dx$

$2\pi \rightarrow 2\pi R$

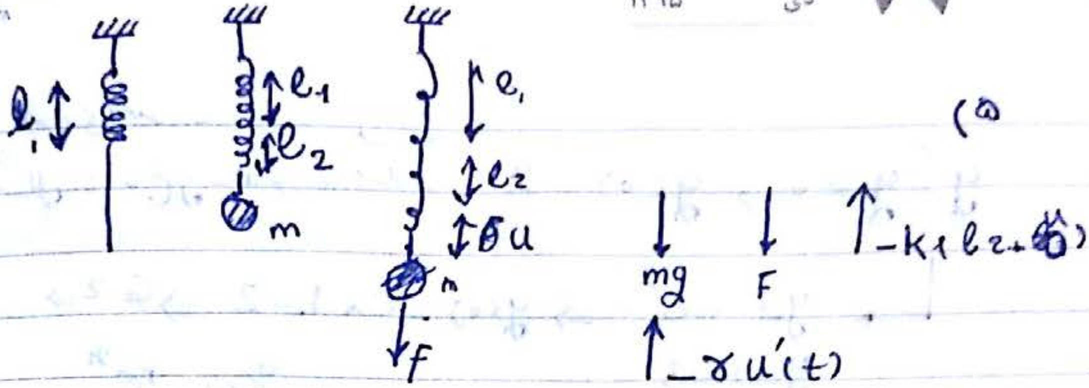
$d\theta \rightarrow L = d\theta R$

$$dx \simeq d\theta R \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} \simeq R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2}R + mg\sin\theta = 0 \Rightarrow R\theta'' + g\sin\theta = 0 \xrightarrow{\text{تا زاویه کم } \theta} R\theta'' + g\theta = 0$$

غیرخطی، مرتبه دوم، همگن — خطی، مرتبه دوم، همگن

۵)



$$mg + F - k(u+l_2) - \gamma u' = ma \Rightarrow a = u''$$

$$mg + F - k(u+l_2) - \gamma u' = ma$$ مرتبه دوم، خطی، ناهمگن

$$\Rightarrow mu'' + \gamma u' + ku = mg + F - kl_2$$

« فصل دوم حل معادلات مرتبه‌ی اول » مشتق انتگرال‌ها؟

۱) معادلات خطی: حل معادله‌ی $y' + a(x)y = b(x)$ مورد نظر است. معادله‌ی کلی و معادله‌ی خطی مرتبه‌ی اول به صورت $p(x)y' + q(x)y = r(x)$ است. برای $p(x) \neq 0$ می‌توان با تقسیم بر $p(x)$ فرم (۱) را بدست آورد.

ابتدا مثال زیر توجه می‌کنیم: $y' = x^2$ $(a(x) = 0 \quad b(x) = x^2)$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{3} + c$$

بنابراین اگر سمت چپ مشتق کامل ایجاد شود، با انتگرال‌گیری مسأله حل می‌شود.

برای تولید مشتق کامل طرفین را در $e^{\int a(x)dx}$ ضرب می‌کنیم.

$$\underbrace{e^{\int a(x)dx}}_{M(x)} y' + \underbrace{a(x)e^{\int a(x)dx}}_{M'(x)} y = b(x)e^{\int a(x)dx} \quad ①$$

قرار می‌دهیم $M(x) = e^{\int a(x)dx}$ در این صورت داریم:

پیوستگی را اول چک کن ⚠

$f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

$M'(x) = \left(\int a(x)\,dx\right)' e^{\int a(x)dx} = a(x) e^{\int a(x)dx}$

① $(M(x)y)' = b(x)M(x) \xrightarrow{\int} M(x)y = \int b(x)M(x)dx + c$

$$y(x) = \frac{\int b(x)M(x)\,dx + c}{M(x)}$$

مثال ۱:

$y' + \frac{1}{x}y = x^2 \quad x>0$

پیوسته است نسبت به پارامتر

پیوسته است نسبت به پارامتر

$M(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$

$xy' + y = x^3 \Rightarrow (yx)' = x^3 \Rightarrow xy = \frac{x^4}{4} + c$

$\Rightarrow y = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$

مثال ۲:

$y' + 2y = g(t) \quad y(0) = 0 \quad g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

$a(t) = 2 \quad b(t) = g(t) \quad M(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$

$e^{2t}y' + 2 \times e^{2t}y = e^{2t} \times g(t) \Rightarrow (y \times e^{2t})' = \begin{cases} e^{2t} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

$ye^{2t} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2t} + c_1 & 0 \leq t \leq 1 \\ c_2 & t > 1 \end{cases}$

$y(0) = 0$ (استفاده از شرط اولیه) محاسبه c_1

$\frac{1}{2} + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$

پیوستگی را اول چک کن

$f(x) = e^{a(x)} \Rightarrow f'(x) = a'(x) \times e^{a(x)}$ $\quad \int a(x)\,dx$

$M'(x) = \left(\int a(x)\,dx\right)' e^{\int a(x)dx} = a(x) e^{\int a(x)dx}$

① $(M(x)y)' = b(x)M(x) \Rightarrow M(x)y = \int b(x)M(x)\,dx + C$

$$y(x) = \frac{\int b(x)M(x)\,dx + C}{M(x)}$$

مثال ۱:

$y' + \frac{1}{x}y = x^2 \qquad x > 0$

ترم نامتشابه ← پیوستها

پیوسته‌اند یا نامتشابه ترم

$M(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = x$

$xy' + y = x^3 \Rightarrow (yx)' = x^3 \Rightarrow xy = \frac{x^4}{4} + C$

$\Rightarrow y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$

مثال ۲:

$y' + 2y = g(t) \quad y(0) = 0 \quad g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

$a(t) = 2 \quad b(t) = g(t) \quad M(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t}$

$e^{2t}y' + 2\times e^{2t}y = e^{2t}\times g(t) \Rightarrow (y\times e^{2t})' = \begin{cases} e^{2t} & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

$ye^{2t} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2t} + C_1 & 0 \leq t \leq 1 \\ C_2 & t > 1 \end{cases}$

$y(0) = 0$ $\quad$ (استفاده از شرط اولیه) محاسبه C_1

$\frac{1}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$

معادلات خطی مرتبه ۲ - معادلات مرتبه اول حل شده - مقایسه است که

برای یافتن c_2 از پیوستگی y استفاده می‌کنیم:

$$y(1) = \lim_{t\to 1^+} y(t) \quad \text{یا} \quad y(1) = \cancel{y(1^+)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} = c_2 e^{-2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}$$

مثال ۳:

Q_0 جرم اولیه نمک، V حجم مایع

ورودی محلول آب نمک با غلظت $c\,\frac{kg}{lit}$ به میزان $r\,\frac{lit}{s}$ و خروجی: ، ، $r\,\frac{lit}{s}$

$Q(t)$ جرم نمک موجود در لحظه‌ی t.

$$\frac{dQ}{dt} = c\frac{kg}{lit} \times r\frac{lit}{s} - \frac{Q(t)\,kg}{V\,lit} \times r\frac{lit}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = cr - \frac{r}{V}Q \Rightarrow Q' + \frac{r}{V}Q = cr$$

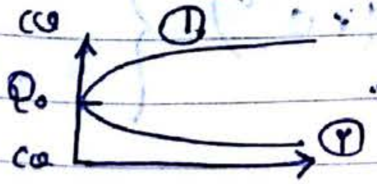
$$\Rightarrow M(t) = e^{\int a(t)dt} = e^{\int \frac{r}{V}dt} = e^{\frac{r}{V}t}$$

$$\Rightarrow \left(Qe^{\frac{r}{V}t}\right)' = cr \times e^{\frac{r}{V}t}$$

$$\Rightarrow Qe^{\frac{r}{V}t} = \frac{cr\,e^{\frac{r}{V}t}}{\frac{r}{V}} + k \Rightarrow Q(t) = cV + ke^{-\frac{r}{V}t}$$

$$\Rightarrow Q(0) = Q_0 = cV + k \Rightarrow k = Q_0 - cV$$

$$Q(0) = Q_0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} Q(t) = cV \quad ①\ cV > Q_0 \quad ②\ cV < Q_0$$



منحنی جواب بر حسب متغیر مستقل
(منحنی انتگرال)

* قضیه‌ی وجود و یکتایی جواب: اگر $a(x)$ و $b(x)$ در بازه‌ی مشخص (α,β) که شامل x_0 پیوسته باشند، آن‌گاه تابع یکتای $y(x)$

وجود دارد که هم در معادله صدق می کند، هم در شرایط

۱۲ یک شنبه
۱۳۹۵ دی
Sunday January 1 2017

$y' + a(x)y = b(x)$

$y(x_0) = y_0$

به علاوه تابع $y(x)$ در بازه‌ی (α, β) پیوسته است.

$$y' + a(x)y = b(x) \xleftrightarrow{M(x) \neq 0} M(x)y' + a(x)M(x)y = M(x)b(x)$$

نحوه‌ی اثبات است خودش

۲) معادلات غیرخطی مرتبه‌ی اول یا معادله‌ی مرتبه اول با فرم کلی

$P(x, y, y') = 0$ که اگر نتوان فرم خطی $y' + a(x)y = b(x)$ نوشت، معادله را غیرخطی می‌گوییم.

معادلات غیرخطی در حالت کلی قابل حل نیستند. به انواع مشخص قابل حل توضیح می‌کنیم:

I) معادلات تفکیک پذیر: اگر معادله‌ی غیرخطی مرتبه اول بتوان حالت ساده‌ای با توابع

وابسته به x و y به صورت جدا تفکیک کرد، معادله را تفکیک پذیر می‌گوییم

$$p(x) + q(y)y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow p(x)dx + q(y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \int p(x)dx + \int q(y)dy = C$$

مثال ۱: $x\,dx + y\,dy = 0$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c \Rightarrow x^2 + y^2 = 2c \Rightarrow$$

c	r
0	0
0.5	1
2	2

مثال ۲: $x^2 dx + y\sin y\, dy = 0$ ، $y(1) = 0$

$$\int \underbrace{y}_{u} \underbrace{\sin y\, dy}_{dv} = y(-\cos y) - \int \cos y\, dy$$

$$= -y\cos y + \int \cos y\, dy = -y\cos y + \sin y$$

$$\frac{x^3}{3} - y\cos y + \sin y = C \Rightarrow x=1 \quad y=0$$

$y(x)$

$$\frac{1}{3} - 0 + 0 = C \Rightarrow C = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x^3}{3} - y\cos y + \sin y = \frac{1}{3}$$

اینقدر لازم نیست صریحاً y را داد.

$\frac{2}{4}$

معادله دیفرانسیل $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ را کامل می‌گوییم اگر تابع $f(x,y)$

معادلات کامل: وجود داشته باشد به طوری که

$$p(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\rightarrow p\,dx + q\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$
$$\Rightarrow df = 0 \Rightarrow f(x,y) = c$$

مثال ۱:

$$x\,dy + y\,dx = 0 \Rightarrow p(x,y) = y,\ q(x,y) = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow f(x,y) = xy \Rightarrow xy = c$$

مثال ۲:

$$2x\sin y\, dx + x^2\cos y\, dy = 0$$

$$\Rightarrow p(x,y) = 2x\sin y \quad q(x,y) = x^2\cos y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos y \Rightarrow f = x^2\sin y$$

$$\Longrightarrow x^2\sin y = c$$

* شرط کامل بودن معادلات دیفرانسیل:

معادله دیفرانسیل $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ کامل است، اگر و تنها

اگر $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ با $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ = $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$

۱۴ شنبه دی ۱۳۹۵

Tuesday January

اثبات: ۱) اگر معادله دیفرانسیل کامل باشد $\Longrightarrow p(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$

$q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$

مشتق‌گیری
شرط اپیسیلی

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

II) اگر $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ برقرار باشد داریم:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} := g(x,y)$$

$$p(x,y) = \int g(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad q(x,y) = \int g(x,y)\,dx = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f(x,y) = \iint g(x,y)\,dx\,dy$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}}$$

مثال ۳: $(y + xy^2)\,dx + (x + x^2 y)\,dy = 0$

بررسی کامل بودن: $\frac{\partial p}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial q}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned} p(x,y) &= y + xy^2 \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 1 + 2xy \\ q(x,y) &= x + x^2 y \longrightarrow \frac{\partial q}{\partial x} = 1 + 2xy \end{aligned}\right\}$$ معادله کامل است

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= p(x,y) = y + xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= q(x,y) = x + x^2 y \end{aligned}\right\} f(x,y) = xy + \frac{x^2 y^2}{2}$$

$$\Longrightarrow xy + \frac{x^2 y^2}{2} = c$$

اگر شرط اولیه داده شده باشد مثلاً $y(1)=2$ ، $(x=1, y=2)$

$1\times 2+\frac{1\times 4}{2}=c \Rightarrow \boxed{c=4}$

$\longrightarrow xy+\frac{x^2y^2}{2}=4$

۳) عامل انتگرال

بسیاری از معادلات به فرم $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ کامل نیستند مانند تاحی

$M(x,y)$ وجود دارد به طوریکه $M(x,y)p(x,y)dx+M(x,y)q(x,y)dy=0$ کامل است.

تشخیص اینکه آیا چنین M ای وجود دارد یا نه در آن در حالت کلی ممکن نیست پس به چند حالت خاص بسنده میکنیم

I) M تابع x

۱) در چه صورت $M(x)$ وجود دارد که ضرب آن در معادله آن را کامل می کند.

۲) محاسبه ی $M(x)$

فرض کنید کامل باشد و $M(x)$ هم داریم:

$$\underbrace{M(x)P(x,y)}_{P}dx+\underbrace{M(x,y)q(x,y)}_{Q}dy=0$$

باید $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\longrightarrow M(x)P_y=M(x)q_x+M'(x)q$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{M'(x)}{M(x)}}_{\text{تابع } x}=\frac{P_y-q_x}{q}$$

تابع x و y

* براساس رابطه ی فوق، $M(x)$ در صورتی وجود دارد که تابع $\frac{P_y-q_x}{q}$ تابعی از x باشد.

محاسبه ی $M(x)$: از رابطه ی (۱) داریم

$$\frac{M'(x)}{M(x)}=\frac{P_y-q_x}{q}$$

$$\int \frac{M'(x)}{M(x)} dx = \int \frac{P_y - q_x}{q} dx$$

$$\ln(M(x)) = \int \frac{P_y - q_x}{q} dx \quad M(x) = e^{\int \frac{P_y - q_x}{q} dx}$$

مثال ۱:

$$x^2 y^2 dx + y\, dy = 0$$

$$\frac{P_y - q_x}{q} = \frac{2x^2 y - 0}{y} = 2x^2$$

شرط وجود: $M(x)$

تابع x است

(تابع x است)

$$M(x) = e^{\int 2x^2 dx} = e^{\frac{2}{3}x^3}$$

معادله کامل شد. حال حل کنیم.

$$\Rightarrow x^2 y^2 e^{\frac{2}{3}x^3} dx + y e^{\frac{2}{3}x^3} dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = x^2y^2e^{\frac{2}{3}x^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ye^{\frac{2}{3}x^3} \;\Big\}\longrightarrow f(x,y) = \frac{y^2}{2}e^{\frac{2}{3}x^3}$$

$$\text{حل} \Longrightarrow \frac{y^2}{2}e^{\frac{2}{3}x^3} = c \Rightarrow y^2e^{\frac{2}{3}x^3} = c'$$

که معلوم بودن $2\times c$ هم c می نویسیم که معادله شد شد تغییر نمی کند...

مثال ۲: ساده نشدنی

$$\underbrace{(3xy+y^2)}_{p}dx + \underbrace{(x^2+xy)}_{q}dy = 0$$

$x+y \neq 0$

$$\frac{p_y - q_x}{q} = \frac{3x+2y-2x-y}{x^2+xy} = \frac{x+y}{x^2+xy} = \frac{1}{x} \checkmark$$

تابع x

$$M(x) = e^{\int \frac{p_y - q_x}{q}dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$$

همین اعمال را برای y هم درست است که یعنی M تابع y باشد.

II) M تابع y:

$$\underbrace{M(y)P(x,y)}_{P}dx + \underbrace{M(y)q(x,y)}_{Q}dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \rightarrow M(y)P_y + M'(y)P = M(y)q_x \rightarrow \frac{M'(y)}{M(y)} = \frac{q_x - P_y}{P}$$

تابع y

$$\Rightarrow M(y) = e^{\int \frac{q_x - P_y}{P}dy}$$

مثال:

$$\underbrace{(2xy+y^2)}_{p}dx + \underbrace{(xy+2y^2)}_{q}dy = 0$$

$$\frac{q_x - P_y}{P} = \frac{y-2x-2y}{2xy+y^2} = \frac{-2x-y}{2xy+y^2} = \frac{-1}{y} \quad (2x+y \neq 0)$$

حذف. دقت کنید ما M هایی که تابع x,y باشند را بلد نیستیم و بررسی هم نمی کنیم.

$$M(y) = e^{\int -\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$ دقت:

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \ln|y| \to \begin{cases} \ln y \\ \ln(-y) \end{cases} \quad e^{\ln|y|} \begin{cases} \to y \\ \to -y \end{cases}$$

هر دو قبول است.

قضیه: وجود و یکتایی جواب: اگر تابع $f(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در بازه‌ی $x \in (\alpha,\beta)$ و $y \in (\gamma,\eta)$ پیوسته باشند که نقطه‌ی (x_0,y_0) را درون این بازه در بر گیرد آنگاه $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ در بازه‌ی (α,β) دارای جواب یکتای $y=\varphi(x)$ است.

جلسه ۵
به نام خدا
چهارم که شد پنجم

طوری که: $\forall x \in (\alpha,\beta) \quad \varphi' = f(x, \varphi(x))$, $\varphi(x_0) = y_0$

مثال: $y' = \sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$$

بازه‌ای که شامل ۰ باشد وجود ندارد که $\frac{\partial f}{\partial y}$ در آن پیوسته باشد ← یعنی نمی‌توان از این قضیه یکتایی وجود استفاده کرد

حل معادله)

۱) $y=0$ جواب معادله است.

۲) $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0)=0 \end{cases} \quad \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = dx$

$$M(y) = e^{\int -\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$$ دقت:

19 یک شنبه
دی ۱۳۹۵
Sunday January 8

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \ln|y| \rightarrow \begin{cases} \ln y \\ \ln(-y) \end{cases} \qquad e^{\ln|y|} \begin{cases} y \\ -y \end{cases}$$

هر دو قبول است.

قضیه: وجود و یکتایی جواب: اگر تابع $f(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در بازه‌ی $x \in (\alpha,\beta)$ ، $y \in (\gamma,\eta)$ پیوسته باشند که نقطه‌ی $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ نیز در این بازه قرار بگیرد آنگاه $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ در بازه‌ی (α,β) دارای جواب یکتای $y = \varphi(x)$ است.

طوری که: $\forall x \in (\alpha,\beta) \quad \varphi' = f(x, \varphi(x))$ ، $\varphi(x_0) = y_0$

حلقه‌ی چهارم که شد پنجم
به نام خدا

مثال: $y' = \sqrt[3]{y}$ ، $y(0) = 0$

بازه‌ای که شامل $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ باشد وجود ندارد که $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$ در آن پیوسته باشد ← یعنی نمی‌توان از قضیه‌ی یکتایی وجود استفاده کرد.

حل معادله)

1) $y = 0$ جواب مسأله است.

2) $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = dx$

$$\Rightarrow \begin{rcases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2y^2 e^{2/3 x^3} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y e^{2/3 x^3} \end{rcases} \rightarrow f(x,y) = \frac{y^2}{2} e^{2/3 x^3}$$

حل $\Longrightarrow \dfrac{y^2}{2} e^{2/3 x^3} = c \Rightarrow y^2 e^{2/3 x^3} = c'$

c' که معلوم نبود ۲×c هم جزو c می‌نویسیم که ساده‌تر شده نتیجه بگیرد...

مثال ۲: ماشتاسونیس

$$(\underbrace{3xy+y^2}_{P})dx + (\underbrace{x^2+xy}_{q})dy = 0$$

$x+y \neq 0$

$$\frac{P_y - q_x}{q} = \frac{3x+2y-2x-y}{x^2+xy} = \frac{x+y}{x^2+xy} = \frac{1}{x} \checkmark$$

تابع x

$$M(x) = e^{\int \frac{P_y - q_x}{q} dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$$

همین اعمال را برای y هم درست است که یعنی M تابع y باشد

II) M تابع y

$$\underbrace{M(y)P(x,y)}_{P}dx + \underbrace{M(y)q(x,y)}_{Q}dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \rightarrow M(y)P_y + M'(y)P = M(y)q_x \rightarrow \frac{M'(y)}{M(y)} = \frac{q_x - P_y}{P}$$

تابع y

$$\Rightarrow M(y) = e^{\int \frac{q_x - P_y}{P} dy}$$

مثال:

$$(\underbrace{2xy+y^2}_{P})dx + (\underbrace{xy+2y^2}_{q})dy = 0$$

$$\frac{q_x - P_y}{P} = \frac{y-2x-2y}{2xy+y^2} = \frac{-2x-y}{2xy+y^2} = \frac{-1}{y}$$ $(2x+y)$

حفظ: دقت کنید ما M های که تابع x,y باشند را بلد نیستیم و برسی هم نمی‌کنیم.

دقت:

$M(y) = e^{\int -\frac{dy}{y}} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$

۱۹ یک شنبه دی ۱۳۹۵

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \ln|y| \to \begin{cases} \ln y \\ \ln(-y) \end{cases}$ $e^{\ln|y|} \begin{cases} y \\ -y \end{cases}$

هر دو قبول است.

قضیه: وجود و یکتایی جواب: اگر تابع $f(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در بازه ی $x \in (\alpha,\beta)$ و $y \in (\gamma,\eta)$ پیوسته باشند که نقطه ی $\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ عنصر در این بازه قرار می‌گیرد آنگاه $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ در بازه ی (α,β) دارای جواب یکتای $y = \varphi(x)$ است.

حله ۵ (به نام خدا): هر چیزی که نشان دهیم

طوری که: $\forall x \in (\alpha,\beta)\ \varphi' = f(x,\varphi(x))$

$\varphi(x_0) = y_0$

مثال: $y' = \sqrt[3]{y}$, $y(0) = 0$

بازه ای که شامل $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ باشد وجود ندارد که $\frac{\partial f}{\partial y}$: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$

چون پیوسته باشد ← نمی توان از قضیه یکتایی وجود استفاده کرد.

حل معادله)

۱) $y = 0$ جواب مسأله است.

۲) $\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = dx$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \left.\begin{array}{l}\frac{3}{2}y^{2/3} = x + c \\ y(0) = 0\end{array}\right\} \rightarrow \underline{c = 0}$$

حذف این تبدیل کردن به فرمی dx, dy ... !

$$\frac{3}{2}y^{2/3} = x \Rightarrow y^2 = \left(\tfrac{2}{3}x\right)^3 \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$

$$\hookrightarrow y_1(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, \; y_2(x) = -\left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2} \Longrightarrow$$

حذف شدیم که یکتا نبود.

* در امتحان تنها دو جواب لازم است یکتایی را چک کنید که بخصوص سوال گفته شود که حل کنید.

بسته بندی روی مسائل غیرخطی که چگونه حل کنیم؟

معادلات غیرخطی مرتبه ی اول

۱) تفکیک پذیر :

۲) کامل (مشتق کامل)

۳) عامل انتگرال

با تغییر متغیر z حل خطی

۴) معادله ی برنولی :

$$y' + a(x)y = b(x)y^n$$

$$\hookrightarrow z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n} \times y' \rightarrow y' = \frac{z'}{(1-n)\times y^{-n}}$$

$$y' = \frac{z'}{1-n}y^n \Rightarrow \frac{z'}{(1-n)\times y^{-n}} + a(x)y = b(x)y^n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z'}{1-n} + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

$$\Longleftrightarrow z' + (1-n)\,a(x)\,z = (1-n)\,b(x) \qquad (1-n) \neq 0$$

مثال:

$$y' + xy = xy^2$$

$$n=2 \iff z = y^{1-2} = y^{-1} \,,\, z' = -\frac{y'}{y^2}$$

$$\iff -y^2 z' + xy = xy^2$$

$$\iff -z' + \frac{x}{y} = x \iff -z' + xz = x$$

$$\iff z' - xz = -x \iff \times e^{\int -x\,dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$z' e^{-\frac{x^2}{2}} - x e^{-\frac{x^2}{2}} z = -x e^{-\frac{x^2}{2}} \iff \left(z e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\iff z e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} + c \iff z = 1 + c e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{y}$$

$$\iff y = \frac{1}{1 + c e^{\frac{x^2}{2}}}$$

معادلات مرتبه اول:

خطی $y' + a(x)y = b(x)$

غیرخطی:

تفکیک پذیر $\to$ $p(x)dx + q(y)dy = 0$

کامل $P_y = q_x$: $p(x,y)dx + q(x,y)d$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow df = 0 \Rightarrow f(x,y) = c$$

عامل انتگرال

تابع x: $\leftarrow \frac{P_y - q_x}{q} = h(x)$

$$\mu(x) = e^{\int h(x)\,dx}$$

$$\frac{q_x - P_y}{p} = q(y)$$

$$\to \mu(y) = e^{\int q(y)\,dy}$$

برنولی

بقیه واضح هستند

اما این را اگر به شکل خود دیدم

تمرین_مرور: ①

$$y' = \frac{3x-2}{y+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x-2}{y+5} \Leftrightarrow (3x-2)\,dx = (y+5)\,dy$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\,dx - (y+5)\,dy \Leftrightarrow \frac{3x^2}{2} - 2x - \frac{y^2}{2} - 5y = c$$

②

$$y' = x^2y + x^2y^2 \Leftrightarrow y' - x^2y - x^2y^2 = 0 \quad n=2$$

$$z = y^{1-2} = y^{-1} \ldots$$

③

$$y' = x^2y + x^2\exp(x^3/3)$$

$$\Leftrightarrow y' - x^2y = x^2\exp(x^3/3) \quad \text{خطی} \times e^{\int -x^2dx} = \times e^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$\rightarrow \left(ye^{-x^3/3}\right)' = x^2 \xrightarrow{\int} ye^{-x^3/3} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^3}{3}e^{\frac{x^3}{3}} + ce^{\frac{x^3}{3}}$$

④

$$(2xy+y^2)\,dx + (xy+2y^2)\,dy = 0$$

خطی نیست، کامل نیست، تفکیک‌پذیر نیست
همگن هم نیست

بررسی کامل بودن

$$\begin{cases} P_y = 2x + 2y \\ Q_x = y \end{cases}$$

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{y - (2x+2y)}{2xy+y^2} = \frac{-2x-y}{(2x+y)xy} = \frac{-1}{y} = h(y)$$

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = g(x)$$

عامل انتگرال‌ساز را می‌سازیم

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = \frac{1}{y}$$

$$(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=2x+y$$

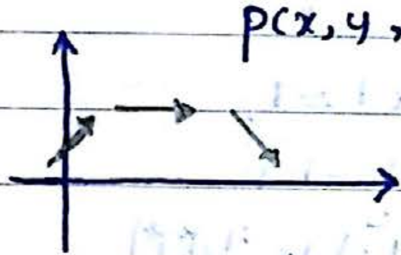
$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+2y$$

$$f(x,y)=x^2+xy+u(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+2y=0+x+u'(y) \to u'(y)=2y \Rightarrow u(y)=y^2$$

$$\Rightarrow f(x,y)=x^2+xy+y^2+c$$

میدان جهت : $p(x,y,z)=$ شارها



$$\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

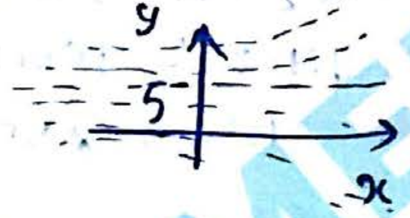
I) معادله‌ی خطی

$y'=2y-15$

$y=5 \to y'=0$

$y>5 \to y'>0$

$y<5 \to y'<0$



به نام خدا جلسه سوم

میدان جهت ادامه

۲) معادله‌ی غیرخطی $y'=f(x,y)$

با توجه به اینکه معادله به ازای f $y(x_0)=y_0$ /
دلخواه قابل حل نیست از یک روش تقریبی استفاده می‌کنیم.

$$x_1=x_0+h \quad y(x_1)\simeq y(x_0)+h\,y'(x_0)=y(x_0)+h\,f(x_0,y(x_0))$$

$$(2x+y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} = 2x+y$$

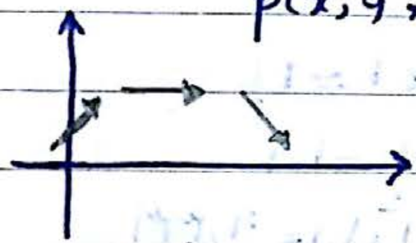
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x+2y$$

$$f(x,y) = x^2 + xy + u(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x+2y = 0 + x + u'(y) \rightarrow u'(y) = 2y \Rightarrow u(y) = y^2 + c$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + c$$

میدان جهت: $p(x,y,z) =$ شارها



$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

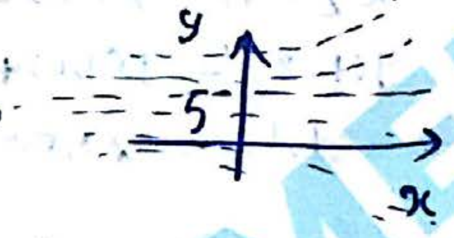
I) معادله‌ی خطی

$y' = 2y - 15$

$y = 5 \rightarrow y' = 0$

$y > 5 \rightarrow y' > 0$

$y < 5 \rightarrow y' < 0$



به نام خدا ∇ جلسه سوم

میدان جهت ادامه

۲) معادله‌ی غیر خطی $y' = f(x,y)$

با توجه به اینکه معادله ازای f / $y(x_0) = y_0$
دلخواه قابل حل نیست از یک روش تقریب استفاده می‌کنیم.

$$x_1 = x_0 + h \quad y(x_1) \simeq y(x_0) + h\,y'(x_0) = y(x_0) + h\,f(x_0, y(x_0))$$

تقریب اویلر $\longrightarrow \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y'(x_i) = f(x_i, y_i) \\ y(x_{i+1}) \simeq y(x_i) + h\, y'(x_i) \end{cases}$

یک الگوریتم برای یافتن y در نقاط مختلف $\longleftarrow$

در واقع با مشتق همه‌ی نقاط را داریم پس نمودار را می‌شود تقریب زد.

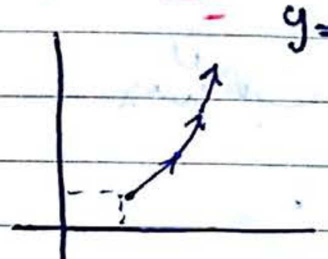
مثال:

$$\begin{cases} y' = x^2 y \\ y(1) = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{اویلر داریم}} \frac{y'}{y} = x^2 \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\Leftrightarrow y = k e^{\frac{x^3}{3}} \Rightarrow y(1) = k e^{\frac{1}{3}} = 1 \longrightarrow k = e^{-1/3}$$

حالا از روش تقریبی (با h های کوچک بگیرید که خطا خیلی زیاد نشود)

$y = e^{\frac{x^3-1}{3}}$ نقطه $(1,1)$ $h = 0.1$



$x_1 = 1.1 \quad y'(1) = 1 \times 1 = 1$

$y(1.1) = y(1) + 1 \times 0.1 = 1.1$

$x_2 = 1.2 \quad y'(1.1) = 1.1^2 \times 1.1 = 1.331$

$y(1.2) = y(1.1) + 0.1\, y'(1.1) =$

$1.1 + 0.1 \times 1.331 = 1.2331$

مقاطع علائم نشان کوچک که ها تابع هستند و خود شکل تابع را مشخص می‌کنند

همانطور که در ریاضی ۱ دیدیم $y(x_1) = y(x_0) + h\, y'(x_0) + O(h^2)$

پس خطا از مرتبه h^2 است $\longleftarrow$ هر چه h کوچکتر باشد خطا کمتر است.

۸۰-۹۰٪ معادلات به صورت دقیق قابل حل نیستند روش تقریبی راه‌گشا هستند البته در یک خطای مد نظر

فصل ۳ معادلات خطی مرتبه‌ی دوم

معادله‌ی خطی مرتبه‌ی دوم با فرم کلی $y'' + P(t)\, y' + q(t)\, y = f(t)$

را در نظر می‌گیریم. به ازای $f(t) = 0$ معادله‌ی خطی مرتبه دوم همگن نامیده می‌شود.

معادله تنها در حالتی قابل حل است که p و q مقادیر ثابت باشند.

قبل از بررسی حل معادله به مفاهیم و قضیه‌های اولیه توجه می‌کنیم

تعریف ۱ (اگر توابع) از تساوی

$\forall t \in [a,b] \quad c_1 f_1(t) + \dots + c_n f_n(t) = 0$

نتیجه گرفت که $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0$ می‌گوییم توابع $f_1, \dots, f_n$ در بازه‌ی $[a,b]$ مستقل خطی هستند.

مثال ۱:

$P_1(t) = \cos t \quad P_2(t) = \sin t$

فرض خلف

$c_1 \cos t + c_2 \sin t = 0 \not\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\to \exists c_1 \text{ or } c_2 \neq 0 \xrightarrow{/c_1} \frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{c_2}{c_1}$ ✗ $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ مستقل خطی هستند

تابع t — عدد ثابت

$c_1 = c_2 = 0$

فرض خلف کردیم که اگر برای همه‌ی t، $c_1 \cos t + c_2 \sin t = 0$ باشد نتیجه نشود که $c_1 = c_2 = 0$ پس یکی باید صفر است بگیرید c_1 صفر نباشد پس تابع $\cot(t) =$ ثابت پس $c_1 = c_2 = 0$

مثال ۲:

$f_1(t) = t \quad f_2(t) = 1 + 2t \quad f_3(t) = t^2 + t + 1$

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0 \Leftrightarrow c_1 t + c_2 + 2c_2 t + c_3 t^2 + c_3 t +$

پس مستقل هستند.

عدد ثابت $\quad c_2 + c_3 = 0 \quad c_2 = 0$

ضریب t $\quad c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \quad c_1 = 0$

ضریب t^2 $\quad c_3 = 0$

قضیه‌ی یک) در معادله‌ی $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ اگر p, q در بازه‌ی I پیوسته باشند آنگاه معادله در بازه‌ی I دقیقاً دارای دو جواب مستقل خطی است.

هر جواب دیگر به صورت $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ است که y_1, y_2 مستقل هستند.

این که حد اقل دو جواب مستقل داریم ... به صورت $c_1y_1+c_2y_2$ جواب است

Monday
January 16 2017
۱۷ ربیع الثانی ۱۴۳۸

۲۷ دوشنبه
دی ۱۳۹۵

ثابت می‌کنیم که اگر y_1, y_2 جواب ... باشند آنگاه $c_1y_1+c_2y_2$ جواب است

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = c_1\underbrace{(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1)}_{} + c_2\underbrace{(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2)}_{} = 0$$

برای بررسی استقلال خطی جواب‌ها می‌توان از مفهوم رونسکین استفاده کرد.

تعریف ۲: رونسکین توابع $y_1(t)$ و ... و $y_n(t)$ برابر است با

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

مشتق $n-1$ام

قضیه ۲: اگر توابع y_1، ...، y_n در بازه‌ی I مستقل خطی باشند، آنگاه

به ازای هر $t \in I$ داریم $W(t) = 0$

نتیجه: برای اثبات مستقل خطی بودن کافی است که یک $\bar{t} \in I$ پیدا شود به طوری که $W(\bar{t}) \neq 0$

مثال ۱)

$$f_1(t) = 1 \quad f_2(t) = 2t$$

$$W(f_1, f_2)(t) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$$

f_1, f_2 روی $\mathbb{R}$ مستقل‌اند

مثال ۲)

$y'' - y = 0 \Rightarrow y'' = y \Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} e^{t} \\ e^{-t} \end{array}\right.$ یا حاصل ضرب ... ← ثابت که sin, cos ها

سه شنبه ۲۸ ۱۳۹۵

نکته اینکه ما کلا جواب صفر را مثلا بی خیال ... داشته باشیم ...

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = -2 \neq 0$$

y_1, y_2 دو جواب مستقل خطی هستند، از این رو هر جواب ... به صورت

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

نتیجه: برای اثبات استقلال یا وابستگی خطی دو روش زیر قابل استفاده است.

۱) استفاده از تعریف و محاسبه‌ی c_i ها

۲) محاسبه‌ی رونسکین (به ازای نقاط خاص t_0)

قضیه‌ی ۳ (رابطه‌ی آبل) اگر توابع p و q پیوسته باشند و y_1 و y_2 دو جواب برای معادله‌ی $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ باشند، آنگاه به ازای هر t_0 در بازه داریم

$$W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau}$$

حل هفتم ۷ در صورت تداخل با ۸٫۲۲ ساعت ۹۱- به آدرس

ode1395.1@gmail.com اطلاع دهید.

معادلات خطی مرتبه‌ی دوم - مرور

تعریف ۱) توابع $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ را در بازه‌ی I مستقل خطی می‌گوییم اگر

بتوان از

$$\forall t \in I \quad c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0$$

نتیجه گرفت که قطعاً $c_i = 0 \; ; \; \forall i$

قضیه ی ۱ : اگر p و q در بازه ی I پیوسته باشند، معادله ی $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ دارای دو جواب مستقل خطی در بازه ی I است مانند y_1 و y_2 که هر جواب دیگر $c_1y_1+c_2y_2$ است.

۱۳۹۵/۱۰/۲۹

نتیجه - یعنی اگر یک معادله به فرم $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ دو جواب داشته باشد که مستقل هستند، هر جواب دیگر به فرم $c_1y_1+c_2y_2$ است و در غیر این صورت جواب دیگری وجود دارد.

$$y''-y=0 \longrightarrow y_1(t)=e^{t},\quad y_2(t)=2e^{t} \qquad W(y_1,y_2)(t)=0$$

y_1 و y_2 مستقل نبودند

پس جواب دیگری وجود دارد $\longrightarrow y_2(t)=e^{-t}$

نکته: دو جواب مستقل برای معادله ی $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ یکتا نیستند. به طور کلی اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل باشند می توان جواب ها را به صورت $y_1 , \alpha y_1+\beta y_2$ نیز در نظر گرفت. ($\beta>0$)

$$y''-y=0 \longrightarrow y_1(t)=e^{t},\quad y_2(t)=e^{-t}$$

$$y_1(t)=e^{t},\quad y_2(t)=e^{t}+e^{-t}$$

بنابراین دو جواب مستقل هر دو باید هستند که هم جواب معادله باشند و هم مستقل خطی باشند.

قضیه ی ۲ - اگر $y_1, \dots, y_n$ در بازه ی I مستقل خطی نباشند آنگاه

$$\forall t\in I,\ W(y_1,\dots,y_n)(t)=\det\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}=0$$

نتیجه: برای اثبات مستقل بودن کافی است یک $t_0\in I$ ای پیدا شود که $W(t_0)\neq 0$.

قضیه ۳ (رابطه ی آبل) اگر p و q در بازه ی I پیوسته باشند و y_1 و y_2 دو جواب برای $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ باشند آنگاه

۳۰ پنجشنبه دی ۱۳۹۵ Thursday January 19 2017

$$\forall t_0, t \in I \quad W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(t)\,dt}$$

اثبات:

$$W(y_1, y_2)(t) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W'(y_1, y_2)(t) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

$$\begin{cases} y_1'' + p(t) y_1' + q(t) y_1 = 0 & \times y_2 \\ y_2'' + p(t) y_2' + q(t) y_2 = 0 & \times y_1 \end{cases} \quad \underbrace{(y_1'' y_2 - y_2'' y_1)}_{-W} + p(t) \underbrace{(y_1' y_2 - y_2' y_1)}_{-W} + q(t)\,(\cancel{y_1 y_2} - y_1 y_2) = 0$$

$$W' + p(t) W = 0 \xrightarrow[\times e^{\int p(t)dt}]{\text{خطی}} \left(W e^{\int p(t)dt} \right)' = 0$$

$$\to W e^{\int p(t)dt} = k \to W = k e^{-\int p(t)dt}$$

$$\to W = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} p(t)dt} \qquad \int p(t)dt = P(t) \to \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau = P(t) - P(t_0)$$

$$\begin{cases} W = k e^{-\int p(t)dt} \\ W = W(t_0) e^{-P(t) + P(t_0)} \end{cases} \longrightarrow k = W(t_0) e^{P(t_0)}$$

جمعه بهمن ۱۳۹۵ Friday January 20 2017

مثال:

$$(1+x^2) y'' + 2x y' + x(1+3x) y = 0$$

$$W(0) = 5 \qquad W(2) = ?$$

$$\to y'' + \frac{2x}{(1+x^2)} y' + \frac{x(1+3x)}{1+x^2} y = 0$$

$$W(2) = W(0) e^{-\int_0^2 p(x)dx} = W(0) e^{-\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}dx} = W(0) e^{-\ln(1+x^2)}$$

$$W(2) = W(0) \times e^{-\ln(1+x^2)\big|_0^2} = 5 e^{-\ln(1+x^2)\big|_0^2}$$

$$= 5 e^{-\ln 5 + \ln 1} = 5 \times \frac{1}{5} = 1$$

$$\ln \frac{1}{5}$$

$$w(y_1,y_2)(t) = w(y_1,y_2)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}$$ نتیجه –

شنبه
بهمن ۱۳۹۵
۲

Saturday

در حالی که p و q پیوسته هستند؛ $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$ برای معادله

باید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیافتد

۱) $\exists t\in I \quad w(t)=0$

y_1 ، y_2 مستقل نیستند

$\forall t\in I \quad w(t)=0$

۲) $\exists t_0 \in I \quad w(t_0)\neq 0 \rightarrow \forall t\in I \quad w(t)\neq 0$

y_1 ، y_2 مستقل هستند

mehr.sharif.ir/~nbagherpour.teaching.ODE

* قضیه: اگر p و q و f در بازه‌ی I پیوسته باشند آنگاه به ازای $t_0\in I$ مسأله‌ی

$$\begin{cases} y''+p(t)y'+q(t)y=f(t) \\ y(t_0)=y_0 \quad y'(t_0)=y_0 \end{cases}$$

دارای جواب یکتاست.

* مثال:

$$y''-y=0 \longrightarrow y(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-t}$$

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=c_1+c_2=0 \\ y'(t)=c_1e^{t}-c_2e^{-t} \\ y'(0)=c_1-c_2=1 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} c_1=\frac{1}{2} \\ c_2=-\frac{1}{2} \end{array} \longrightarrow y(t)=\frac{e^{t}}{2}-\frac{e^{-t}}{2} = \sinh t$$

* معادله‌ی همگن ضریب ثابت:

$$y''+ay'+by=0 \quad (1)$$

با توجه به اینکه صورت معادله جمع تابع، مشتق و مشتق دوم آن ها را با صفر مقایسه می‌کند. حدس مناسب برای جواب e^{rt} است.

۳

$$y(t)=e^{rt},\quad y'(t)=re^{rt},\quad y''(t)=r^2e^{rt}$$

جایگذاری ابتدا $\longrightarrow$ $(r^2+ar+b)e^{rt}=0$

$y=e^{rt}$ وقتی جواب است که r در معادله صدق کند

$$r^2+ar+b=0 \longrightarrow (1)$$

$r^2+ar+b=0$ صدق کند در این حالت برای r معادله مشخصه می‌گوییم. هست

۱) حل r^2+ar+b دو ریشه r_1 و r_2 دو جواب $\{e^{r_1t}, e^{r_2t}$

حالت‌های مختلف برای ریشه‌ها $\{$

I) دو ریشه حقیقی متمایز

$r_1\neq r_2$ $\quad y_1(t)=e^{r_1t}$ $\quad y_2(t)=e^{r_2t}$

$$W(y_1,y_2)(t)=\det\begin{bmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t}\end{bmatrix}\neq 0$$

$\longleftarrow$ y_1, y_2 مستقل خطی هستند $\longleftarrow$

$$y(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$$

$$y''-3y'+2y=0 \longrightarrow r^2-3r+2=0 \longrightarrow r_1=1,\ r_2=2 \rightarrow$$

$$y(t)=c_1e^{t}+c_2e^{2t}$$

شروع جلسه ۷

«معادلات مرتبه‌ی دوم ضریب ثابت»

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (*)$$

نکته (مرور): اگر r جواب معادله مشخصه‌ی

$$r^2 + ar + b = 0$$

باشد آنگاه e^{rt} جواب معادله‌ی $(*)$ است.

حالت‌های مختلف ریشه‌ها:

حالت اول: ریشه‌های حقیقی متمایز

r_1, r_2

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= e^{r_1 t} \\ y_2(t) &= e^{r_2 t} \end{aligned}\right\} \longrightarrow y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$W(y_1, y_2) \neq 0$$

حالت دوم: ریشه‌های مختلط $\alpha \pm \beta i$

$\beta \neq 0$

$\tilde{y}_1(t) = e^{(\alpha+\beta i)t} \quad , \quad \tilde{y}_2(t) = e^{(\alpha-\beta i)t}$

اینجا دیگر $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ مختلط هستند. هدف: تولید جواب‌های مستقل حقیقی متولد است:

$c_1 = \frac{1}{2}, \; c_2 = \frac{1}{2}$

$$y_1(t) = \frac{\tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t)}{2}$$

$c_1 = \frac{1}{2}, \; c_2 = -\frac{1}{2}$

$$y_2(t) = \frac{\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)}{2}$$

$\rightarrow$ y_1 و y_2 جواب هستند.

آیا حقیقی مستقل هم هستند؟

حقیقی بودن:

$$y_1(t) = \frac{e^{(\alpha+\beta i)t} + e^{(\alpha-\beta i)t}}{2} = \frac{e^{\alpha t} e^{(\beta t)i} + e^{\alpha t} e^{-(\beta t)i}}{2} = \frac{e^{\alpha t}(\cos\beta t + \cancel{i\sin\beta t} + \cos\beta t - \cancel{i\sin\beta t})}{2}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ فرمول اویلر

$$= e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$y_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$ ✓ $\leftarrow$ $\boxed{\text{حقیقی متعلد}}$

$\boxed{\text{حقیقی متعلد}}$

استقلال خطی

$$W(y_1, y_2) = \det\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t - \beta\sin\beta t) & e^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t + \beta\cos\beta t) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha t}\Big[\cancel{\alpha\sin\beta t\cos\beta t} + \beta\cos^2\beta t - \cancel{\alpha\sin\beta t\cos\beta t} + \beta\sin^2\beta t\Big]$$

$$= e^{2\alpha t}\big[\beta(\sin^2\beta t + \cos^2\beta t)\big] = \underbrace{\beta}_{\neq 0}\underbrace{e^{2\alpha t}}_{\neq 0} \neq 0 \quad \text{تمام}$$

y_1 و y_2 در حساب حقیقی متمایز و مستقل برای معادله هستند هم حساب معادله ی

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t$$

مثال :

$$y'' + 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1$$

معادله مشخصه را تشکیل می دهیم

$$r^2 + 4 = 0 \rightarrow r = \pm 2i \rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{matrix} \begin{cases} y_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t \\ y_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t \end{cases}$$

$$\rightarrow y(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$$

شروط اولیه : $y(0) = c_1 \times 1 + c_2 \times 0 = c_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= c_2\sin 2t \\ y'(t) &= 2c_2\cos 2t \\ y'(0) &= 2c_2 = 1 \rightarrow c_2 = \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right\} y(t) = \tfrac{1}{2}\sin 2t$$

حالت سوم : ریشه ی مضاعف $r^2 + ar + b = 0 \xrightarrow[r_1 = r_2 = r]{}$

$y_1(t) = e^{rt}$ ؟ باید چه باشد

$y_2(t) = \cancel{e^{rt}}$ مستقل نیست

$y_2(t) = u(t)\, e^{rt} \longrightarrow u(t) = ?$

دنبال کشف u می رویم

$y_2 = u(t)\, e^{rt} \qquad y_2' = e^{rt}(r u(t) + u'(t))$

$$y_2'' = e^{rt}\left(r^2 u(t) + r u'(t) + r u'(t) + u''(t)\right)$$

$y_2'' + a y_2' + y_2 = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$

$$e^{rt}\left[r^2u + 2ru' + u'' + aru + au' + bu\right] = 0$$

$$\left[\underbrace{(r^2+ar+b)}_{0} u + \underbrace{(2r+a)}_{0} u' + u''\right] = 0 \Rightarrow u''=0$$

این که اصلاً r ریشه، صفر در

ریشه مضاعف بوده پس صفر

$r=\frac{-a}{2}$

پس u تابعی خطی است پس $u(t)=\alpha t+\beta$

$$y_2(t) = e^{rt}u(t) = e^{rt}(\alpha t+\beta) \begin{cases} y_1(t)=e^{rt} \\ y_2(t)=te^{rt} \end{cases}$$

$y_1(t)=e^{rt}$

فرم عام — فرم کلی

حالا کافی است ثابت کنیم این‌ها مستقل هم هستند:

$$W(y_1,y_2) = \det\begin{vmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (rt+1)e^{rt} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2rt}(rt+1-rt) = e^{2rt} \neq 0 \rightarrow \text{جواب مستقل هستند}$$

$$\rightarrow y(t) = c_1e^{rt} + c_2te^{rt}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \longrightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$$

مثال:

$$r_1 = r_2 = 2$$

پنج شنبه
بهمن ۱۳۹۵

Thursday
January 26 2017

شرایط اولیه

$y(0)=1$
$y'(0)=1$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 (2t+1) e^{2t}$$

$$\left.\begin{aligned} y'(0) &= 2c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow c_2 = -1 \longrightarrow y(t) = e^{2t} - te^{2t}$$

حل معادله ی ضریب ثابت مرتبه ی دوم [جمع بندی]

مرحله ی اول: تشکیل معادله ی مشخصه $r^2 + ar + b = 0$ و محاسبه ی ریشه ی

Friday
January 27

جمعه
بهمن ۱۳۹۵

مرحله ی دوم: بررسی نوع ریشه ی (حقیقی متمایز یا مختلط یا مضاعف)

مرحله سوم: تشکیل جواب ها مستقل بر اساس نوع ریشه ی

مرحله ی چهارم: تشکیل جواب با فرم $c_1y_1 + c_2y_2$ و محاسبه ی اگر شرایط اولیه داده شد

معادله ی کوشی اویلر

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

برای x های مثبت، $\longrightarrow$ تغییر متغیر $x = e^t$

اگر برای x ها منفی بخواهیم ① تغییر متغیر می دهیم $x = -e^t$.

مشتق نسبت x به y

مشتق وشت به t

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{e^t} \Rightarrow y'_t = y' \times e^t \quad (2)$$

زنجیره

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{e^t}\right) = \frac{\frac{d\left(\frac{y'_t}{e^t}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{y''_t e^t - y'_t e^t}{e^{2t}}}{e^t} = \frac{y''_t - y'_t}{e^{2t}} \quad (3)$$

(1),(2),(3)

$$\cancel{e^{2t}}\frac{y''_t - y'_t}{\cancel{e^{2t}}} + a\cancel{e^t}\frac{y'_t}{\cancel{e^t}} + by = 0$$

$$\Rightarrow y''_t + (a-1)y'_t + by = 0 \Rightarrow r^2 + (a-1)r + b = 0$$

$$\longrightarrow r_1, r_2 \longrightarrow y(t) = ?$$

مشتق y نسبت به x — مشتق y نسبت به t

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{e^t} \Rightarrow y'_t = y' \times e^t \quad (۲)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{e^t}\right) = \frac{\frac{d\left(\frac{y'_t}{e^t}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\frac{y''_t e^t - y'_t e^t}{e^{2t}}}{e^t} = \frac{y''_t - y'_t}{e^{2t}} \quad (۳)$$

(۱),(۲),(۳)

$$\cancel{e^{2t}} \frac{y''_t - y'_t}{\cancel{e^{2t}}} + a\cancel{e^t} \frac{y'_t}{\cancel{e^t}} + by = 0$$

$$\Rightarrow y''_t + (a-1)y'_t + by = 0 \Rightarrow r^2 + (a-1)r + b = 0$$

$$\longrightarrow r_1, r_2 \longrightarrow y(t) = ? \text{ —}$$

شروع جلسه

بنام خدا سه‌شنبه ۲۷، ۸ اسفند ۹۵

معادله‌ی کوشی اویلر:

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

$$\xrightarrow[x>0]{x = e^t} y''_t + (a-1)y'_t + by = 0 \longrightarrow$$

$$r^2 + (a-1)r + b = 0 \longrightarrow r_1, r_2$$

همانطور که در سری قبل y_1 و y_2 محاسبه می‌شود.

r_1, r_2 حالت اول: ریشه‌های حقیقی متمایز

$$y_1(t) = e^{r_1 t}$$
$$y_2(t) = e^{r_2 t} \rightarrow y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$(x = e^t)$

$$\rightarrow y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

حالت دوم: $\alpha \pm \beta i$ ریشه‌ی مختلط‌ها هستند

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos\beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin\beta t$$

$x = e^t$
$t = \ln x$

$$y(x) = c_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + c_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$$

حالت سوم: ریشه‌های مضاعف

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$
$$y(x) = c_1 x^r + c_2 x^r \ln x$$

مثال:

$$x^2 y'' + 3 x y' + y = 0$$

$$a = 3 \quad b = 1 \longrightarrow r^2 + (3 - 1) r + 1 = 0 \longrightarrow$$

شبیه معادلات با ضریب ثابت

$$r_1 = r_2 = -1$$

روش‌های بالا برای حل بازه‌های خالی از صفر هستند. (مثلا در $x>0$ حل کردیم)
$x<0$ هم مثل همین

• معادلات مرتبه‌ی دوم ناهمگن خطی با فرم کلی

$$y'' + p(t) y' + q(t) y = g(t)$$

صفر نبود ناهمگن

می‌خواهیم نشان دهیم اگر تنها یک جواب از معادله‌ی ناهمگن را بدست بیاوریم کافی است زیرا نشان می‌دهیم هر جواب = جواب ناهمگن + جواب عمومی معادله‌ی همگن

(۱)

قضیه: اگر y_1 و y_2 دو جواب از معادله‌ی $y'' + p(t) y' + q(t) y = f(t)$ باشند، آنگاه $y_2 - y_1$ جواب معادله‌ی همگن است.

$$\hookrightarrow y'' + p(t) y' + q(t) y = 0$$

اثبات: هر دو صدق می‌کنند در معادله یعنی $y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1=f(t)$

$y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2=f(t)$

$$(y_2-y_1)''+p(t)(y_2'-y_1')+q(t)(y_2-y_1)=0$$

نتیجه: اگر $\varphi(t)$ یک جواب برای معادلهٔ ناهمگن (1) باشد و y_1, y_2 دو جواب مستقل برای معادلهٔ همگن متناظر با آن باشند آنگاه هر جواب معادلهٔ ناهمگن به فرم

$$\underbrace{\varphi(t)}_{\text{یک جواب ناهمگن}}+\underbrace{c_1y_1+c_2y_2}_{\text{جواب کلی معادله همگن}}$$

$\psi(t)-\varphi(t)=c_1y_1+c_2y_2$

$\psi(t)=\varphi(t)+c_1y_1+c_2y_2$

که یک جواب دیگر ... یک جواب دلخواه این معادله

برای محاسبهٔ همهٔ جواب‌های ناهمگن با فرم کلی (1) کافی است یک جواب را آن $\varphi(t)$ و دو جواب مستقل برای معادلهٔ همگن متناظر محاسبه کنیم.

پس فقط دنبال این هستیم اگر یک جواب برای $\varphi(t)$ ناهمگن است.

* محاسبهٔ $\varphi(t)$ برای معادلات ضریب ثابت ناهمگن

$$y''+ay'+by=f(t)$$

روش حدسی (روش ضرایب نامعین)

ساختار کلی این روش به این ترتیب است که یک فرم مناسب با توجه به تابع $f(t)$ برای φ حدس می‌زنیم با جایگذاری این حدس در معادله، ضرایب نامعین آن را محاسبه می‌کنیم.

به مثال‌های زیر توجه می‌کنیم: (حتماً بلد باشید کامل)

مثال 1:
$$y'' - 3y' - 4y = t^2 + 5t + 1$$

حدس می‌زنیم y درجه ۲ بوده است

زیرا * جمع تابع و مشتق‌هایش درجه آن یک چند جمله‌ای درجه ۲ است که آنی

منظور این است که تابع را درجه ۲ در نظر بگیریم.

$$\varphi(t) = at^2 + bt + c$$
$$\varphi(t) = at^2 + bt + c$$
$$\varphi'(t) = 2at + b$$
$$\varphi''(t) = 2a$$

$$\to 2a - 6at - 3b - 4at^2 - 4bt - 4c = t^2 + 5t + 1$$

$$\Rightarrow -4a = 1 \to a = -\frac{1}{4}$$
$$-6a - 4b = 5 \to b = -\frac{3.5}{4} = -\frac{7}{8}$$
$$2a - 3b - 4c = 1 \qquad c = \frac{2a - 3b - 1}{4} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{21}{8} - 1}{4} = \frac{9}{32}$$

حل معادله‌ی همگن: $y''-3y'-4y=0$

$r^2-3r-4=0 \longrightarrow r_1=4 \quad r_2=-1 \qquad e^{4t}, e^{-t}$

جواب کلی ناهمگن $y(t)=-\frac{1}{4}t^2-\frac{7}{8}t+\frac{9}{32}+c_1e^{4t}+c_2e^{-t}$

مثال ۲: $y''-3y'-4y=e^{3t}$

$\varphi''-3\varphi'-4\varphi=e^{3t}$

$\varphi(t)=ke^{3t}$

$\varphi'(t)=3ke^{3t}$

$\varphi''(t)=9ke^{3t}$

$\Leftrightarrow (9k-9k-4k)e^{3t}=e^{3t} \longrightarrow -4k=1$

$\Leftrightarrow k=-\frac{1}{4} \Rightarrow \varphi(t)=-\frac{1}{4}e^{3t}$

خوب شد این صفر شد (:

مثال ۳: $y''-3y'-4y=e^{-t}$

$\varphi''-3\varphi'-4\varphi=e^{-t}$

$\varphi(t)=ke^{-t}$

$\varphi'(t)=-ke^{-t}$

$\varphi''(t)=ke^{-t}$

$\longrightarrow (\cancel{k+3k-4k})\,e^{-t}=e^{-t}$

$0=e^{-t}$ ✗ محال

متاسفانه صفر شد :(

حدس ما خراب بود

غیرجواب معادله‌ی همگن سمت چپ بود

در حالت کلی اگر e^{rt} که در سمت راست قرار گرفته، جواب معادله همگن نباشد آنگاه حدس $\varphi(t)=ke^{rt}$ جواب بدست می‌دهد.

مثالها

منابع اصلی

نیست

راه حل: به ازای هر جواب e^{rt} برای معادله‌ی همگن، حدس

$\varphi(t)=ke^{rt}$ در یک t ضرب می‌شود.

۴ هم درست است؟ فقط بخاطر همه‌ی جواب‌ها ضرب ریشه بوده.

$$r^2-3r-4=0 \longrightarrow r_1=4 \quad r_2=-1$$

e^{-t} (طرف راست) یک بار جواب ممکن است.

$$\varphi(t)= \underline{ke^{-t}\times t}$$ در t ضرب شد

$$\varphi'(t) = (-kt+k)e^{-t}$$

$$\varphi''(t) = (-k+kt-k)e^{-t}$$

$$\varphi''-3\varphi'-4\varphi=e^{-t}$$ جایگذاری می‌کنیم

$$[\cancel{kt}-2k+\cancel{3kt}-3k-\cancel{4kt}]\cancel{e^{-t}}=\cancel{e^{-t}}\ 1$$

ضریب + قسمتی صفر خواهد شد که به ازای یک ریشه حدس بود (با همین حذف)

$$\Rightarrow -5k=1 \Rightarrow k=-\frac{1}{5} \Rightarrow \varphi(t)=-\frac{1}{5}te^{-t}$$

اینجوری که حدس ما ke^{-t} بود اما دیدیم که ضرایب حذف شد و کار خراب شد پس حالا بسم e^{-t} جز جواب‌های خنثی ممکن است. اگر یک بار جواب بود حدس درست $ke^{-t}\times t$ است اگر دو بار جواب بود...

مثال ۴:
$$y''+2y'+y=e^{-t}$$

$$y''+2y'+y=0 \longrightarrow r_1=r_2=-1 \longrightarrow e^{-t},\ te^{-t}$$

۲ بار جواب ممکن است

۱ـ بار رفتار شد پس

$\varphi(t) = ke^{-t} \times t^2 \quad \varphi'(t) = (2kt - kt^2)\, e^{-t}$

$\varphi''(t) = (2k - 2kt - 2kt + kt^2)\, e^{-t}$

$\varphi'' + 2\varphi' + \varphi = e^{-t}$

$[(2k - 4kt + kt^2) + 4kt - 2kt^2 + kt^2]\, e^{-t}$

$= e^{-t} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$

مثال ۵: $y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$

$\varphi_{(t)} = a\cos t + b\sin t \rightarrow -a\cos t - b\sin t + 3a\sin t - 3b\cos t - 4a\cos t - 4b\sin t = 2\sin t$

ضرایب cos صفر است باید صفر شود و ضرایب sin باید ۲ شود

$\varphi' = -a\sin t + b\cos t$

$\varphi'' = -a\cos t - b\sin t$

$\varphi'' - 3\varphi' - 4\varphi = 2\sin t$

$-5a - 3b = 0 \Rightarrow$

$3a - 5b = 2$

$(9a - 15b = 6,\ 25a + 15b = 0) \rightarrow a = \frac{6}{34} = \frac{3}{17}$

$b = \frac{-5}{17}$

What happened? :(

شروع جلسه ی ۱۷ از ۱۵

معادلات ضریب ثابت ناهمگن (مرور) $y''+ay'+by=f(t)$

$y=\underbrace{c_1y_1+c_2y_2}_{}+\varphi(t)$ خصوصی

y_1 و y_2 جواب مستقل از هم در معادله ی همگن

یک جواب از معادله

روش حدسی برای یافتن $\varphi(t)$

حدس $\varphi(t)$ با توجه به ضابطه ی $f(t)$ داده شده ضرایب φ با

جایگذاری در معادله

(تابع) $f(t)$	(حدس) $\varphi(t)$
حدس ساده: e^{rt}	حدس $\varphi(t)=ke^{rt}$
$\sin\alpha t$ یا $\cos\alpha t$	$\varphi(t)=a\sin\alpha t+b\cos\alpha t$
چندجمله ای درجه n ← $P_n(t)$	$\varphi(t)=q_n(t)$

لیکن استثنا داشتیم. اگر حدس φ جواب معادله ی همگن باشد، داریم

$$(y''+ay'+by)\Big|_{\varphi(t)}=0\neq f(t)$$

در این حالت به تعداد دفعاتی که $f(t)$ جواب معادله ی همگن است، حدس را در t ضرب می کنیم.

مثال ۱:

$$y''-3y'-4y=e^{-t}$$

ریشه های معادله ی همگن $\longrightarrow$ $\underbrace{r_1=-1}$ $\quad r_2=4$

e^{-t} یکبار جواب همگن است. $\rightsquigarrow \varphi(t)=ke^{-t}\times t$

مثال ۲: $y'' + 2y' + y = e^{-t}$

همگن $r_1 = r_2 = -1 \longrightarrow \varphi(t) = ke^{-t} \times t^2$

دیدیم که اشکال رو کشیم و $\varphi(t)$ رو بذاریم تو معادله

دو بار جواب همگن است.

ثابت k در میاد. اگر φ گذاشتید، جواب اضافی (متفاوت) با سمت راست یا $f(t)$

خوب رو حدستون $(\varphi(t))$ شک کنید.

مثال ۳: $y''+y = \cos t + 2\sin t$

جمع ۲ مستقل

معادله همگن $y''+y=0 \Longrightarrow \sin(t) , \cos(t)$

همگن $\Rightarrow \varphi(t) = (a\sin t + b\cos t) \times t$

زیرا $a\sin t + b\cos t$ پاسخ معادله همگن هم یکبار.

$\Rightarrow \varphi'(t) = a\sin t + b\cos t + (a\cos t - b\sin t)\, t$

$\varphi''(t) = 2a\cos t - 2b\sin t + (-a\sin t - b\cos t)\, t$

$\varphi''+\varphi = \cos t + 2\sin t \Leftarrow$ میذاریم

جایگذاری $\varphi''+\varphi$ برابر $2a\cos t - 2b\sin t + (-a\sin t - b\cos t)\, t + (a\sin t + b\cos t)\times t = 2a\cos t - 2b\sin t = 1\cos t + 2\sin t$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad b = -1$

$\Rightarrow \varphi(t) = (\frac{1}{2}\sin t - \cos t) \times t$

مثال ۴:

$$y''+3y'=t^2+5t$$

راه اول:

تغییر متغیر

$$y'=p \Rightarrow p'+3p=t^2+5t$$

عامل انتگرال

$$\xrightarrow{\times e^{3t}} (pe^{3t})'=(t^2+5t)e^{3t}$$

$$pe^{3t}=\int (t^2+5t)e^{3t}\,dt$$

خب حالا انتگرال بگیریم:

انتگرال جزئی

$$\int \underbrace{t^2}_{u}\,\underbrace{e^{3t}dt}_{dv}=\frac{t^2e^{3t}}{3}-\int \frac{e^{3t}}{3}\times(2t)\,dt$$

$$=\frac{t^2e^{3t}}{3}-\frac{2}{3}\int \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^{3t}dt}_{dv}$$

$$=\frac{t^2e^{3t}}{3}-\frac{2}{3}\left[\frac{t}{3}e^{3t}-\int\frac{e^{3t}}{3}dt\right]=\frac{t^2}{3}e^{3t}-\frac{2}{9}te^{3t}+\frac{2}{27}e^{3t}$$

$$\int te^{3t}dt=\frac{t}{3}e^{3t}-\frac{1}{9}e^{3t}$$

$$pe^{3t}=\int(t^2+5t)e^{3t}dt=\left(\frac{t^2}{3}-\frac{2}{9}t+\frac{2}{27}\right)e^{3t}+\frac{5}{3}te^{3t}-\frac{5}{9}e^{3t}+c$$

$$\Rightarrow p=\frac{t^2}{3}+\frac{13}{9}t-\frac{13}{27}+ce^{-3t}=y'$$

$$\Rightarrow y=\frac{t^3}{9}+\frac{13}{18}t^2-\frac{13}{27}t-\frac{c}{3}e^{-3t}+c'$$

$(y''+y'=0)$ wow! was too long

حتی یکی از جوابهای φ جواب همگن باشد در t ضرب کنید.

راه دوم: $\varphi(t) = at^2+bt+c$

$\boxed{\text{عجیب}}$: حتی اگر یکی از جملات تشکیل دهنده حدس جواب همگن باشد نیز باز هم لازم است حدس در t ضرب شود مثلاً با c جواب همگن است:

$$\varphi(t) = (at^2+bt+c)\times t$$

$$\varphi'(t) = 3at^2+2bt+c$$

$$\varphi''(t) = 6at+2b \qquad \varphi''+3\varphi' = t^2+5t$$

$$6at+2b+9at^2+6bt+3c = t^2+5t$$

$$9a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{9} \qquad 2b+3c=0$$

$$6a+6b=5$$

$$\varphi(t) = \left(\frac{1}{9}t^2+\frac{13}{18}t-\frac{13}{27}\right)\times t$$

جواب همگن $\begin{cases} y_1=1 \\ y_2=e^{-3t} \end{cases}$

$$\text{جواب} = c_1+c_2e^{-3t}+\varphi(t)$$

تحلیل

اگر با جواب حتی مقایسه کنیم به نظر شبیه است.

$$=y''+3y'\Big|_{at^2}+(\quad)\Big|_{bt}+(\quad)\Big|_{c}$$

$$c_1t+c_2+c_3+0 = t^2+5t \;\times$$

b و a جواب

هر زمانی در مسائله دیدیم یک تابعی هیچ نتیجه ی خاصی به ما ندادست اصل که $y'+y''$ کلاً خط خورد و رفت ما هم $\varphi(t)$ را ضرب در t می کنیم $\varphi(t)$ لذا هر جا که می کنیم بی معنا است یعنی برای ضرب + ندادیم

پنج شنبه ۲۱ بهمن ۱۳۹۵

Thursday February 9 2017

فرض شده نتیجه ی خاص نداد پس $\times t$ کن.

مثال:

$$y''-3y'-4y=e^{-t}(t+2)$$

$$\varphi(t)=e^{-t}(at+b)\times t$$

هم: چون e^{-t} یا پاسخ همگن برای $(t+2)$ است پس باید t ضرب می کنیم.

بالایی

را بی ضریب برای e^{-t} نداشتیم انگاه خود $at+b$ را بردیم.

$$ke^{-t}(at+b)=e^{-t}(ka t+kb)$$

مثال میان رم: (جمع ضرب) $(\cos t, \sin t)$ $(\exp)$

$$y''+y=e^{t}\times\sin t\times t^2$$

$$\varphi(t)=e^{t}(a\sin t+b\cos t)(ct^2+dt+e)t$$

همه با پاسخ همگن

$\times t$

با پاسخ همگن

$\times t$

ادامه

$$\varphi=e^{-t}(at+b)t=e^{-t}(at^2+bt)$$

$$\varphi'=e^{-t}(2at+b-at^2-bt)$$

$$\varphi''=e^{-t}(2a-2at-b-2at+at^2+bt)$$

$$\varphi'' - 3\varphi' - 4\varphi = [2a - 2b - 4at + bt + \cancel{at^2}$$

$$- 4at - 3b + \cancel{3at^2} + 3bt - \cancel{4at^2} - 4bt]\, e^{-t}$$

$$(t+2)e^{-t}$$

$$\begin{cases} 2a - 5b = 2 \\ -10a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-1}{10} \quad b = \frac{2a-2}{5} = -0.44$$

* روش پارامتر کی تغییر برای محاسبه‌ی φ

$$\varphi(t) = u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)$$

در جواب معادله‌ی همگن

$$\varphi' = u_1 y_1' + u_1' y_1 + u_2 y_2' + u_2' y_2$$

$\varphi'' =$ ---- $\longrightarrow$ ۸ جمله

می‌شه پیچیده

لا به هر حال u_1 و u_2 دست ما هستند پس می‌تونیم یکاری کنیم که ساختن کنیم که مثلاً $\boxed{u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0}$ ← یک فرض اضافه از خودمان می‌گذاریم تا حسابش راحت کند:

توجه - ۱) فرض اضافه بر روی u_1 و u_2 اشکالی ایجاد نمی‌کند زیرا کافی است همان‌طور φ جواب ناهمگن باشد.

۲۴ یک شنبه
بهمن ۱۳۹۵
Sunday
February 12 2017

۲) این فرض باعث ساده‌تر شدن محاسبات می‌شود.

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \Rightarrow \varphi' = y_1' u_1 + y_2' u_2$$

$$\varphi'' = y_1' u_1' + \underline{y_1'' u_1} + y_2' u_2' + \underline{y_2'' u_2}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله ناهمگن}} \varphi'' + a\varphi' + b\varphi = f(t)$$

$$y_1' u_1' + \underline{y_1'' u_1} + y_2' u_2' + \underline{y_2'' u_2} + a\underline{y_1' u_1} + \underline{a y_2' u_2}$$
$$+ b\underline{y_1 u_1} + \underline{b y_2 u_2} = f(t) \quad (1)$$

دقت کنید که y_1, y_2 جواب همگن هستند:

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 = 0 \quad (2)$$
$$y_2'' + a y_2' + b y_2 = 0 \quad (3) \xrightarrow{(1),(2),(3)}$$

$$u_1 \cancel{(y_1'' + a y_1' + b y_1)}^{0} + u_2 \cancel{(y_2'' + a y_2' + b y_2)}^{0}$$
$$+ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(t) \Rightarrow y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(t)$$

شرط اضافی

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(t) \end{cases}$$

با حل دستگاه u_1' و u_2' را حساب می‌کنیم.

با انتگرال‌گیری u_1 ، u_2 محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

با جاگذاری u_1 و u_2 تابع $\varphi = y_1 u_1 + y_2 u_2$ جواب معادله ناهمگن است.

Monday
February 13 2017
۱۵ جمادی الاول ۱۴۳۸

۲۵ دوشنبه
بهمن ۱۳۹۵

* توجه دستگاه فوق جواب یکتا دارد زیرا

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \neq 0 \longrightarrow y_1 , y_2$$

جواب مستقل برای معادله همگن هستند.

*توجه دستگاه فوق جواب یکتا دارد زیرا

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \neq 0 \longrightarrow y_1 \text{ و } y_2$$

جواب مستقل برای معادله ی همگن هستند.

بنام خدا شروع جلسه ی ۳ آبان ▽

معادله ی ضریب ثابت ناهمگن: ۱) روش حدسی

۲) روش پارامترهای متغیر

دو جواب مستقل خطی را معادله ی همگن

$$\varphi(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \longrightarrow u_1', u_2' \;?\; u_1, u_2$$

$\varphi(t)$ ← جواب $y'' + ay' + b = f(t)$ را است.

مثال: $y'' + 4y = \dfrac{3}{\sin t}$

$$y'' + 4y = 0 \longrightarrow r^2 + 4 = 0 \longrightarrow r = \pm 2i$$

$$\longrightarrow y_1 = \cos(2t) \quad y_2 = \sin(2t)$$

$$\longrightarrow \varphi(t) = \cos(2t)u_1 + \sin(2t)u_2$$

$$\to \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{3}{\sin t} \end{bmatrix}$$

تا شروطی که باید برقرار شد

$$\to \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{3}{\sin t} \end{bmatrix}$$

* (برقرار بودن سطر اول)

$$\to \cos 2t\, u_1' + \sin 2t\, u_2' = 0 \to u_1' = -\tan 2t \times u_2'$$

* (برقرار بودن سطر دوم)

$$-2\sin 2t\,(-\tan 2t)\, u_2' + 2\cos 2t\, u_2' = \frac{3}{\sin t}$$

$$\to \left[\left(\frac{2\sin^2 2t}{\cos 2t}\right) + 2\cos 2t\right] u_2' = \frac{3}{\sin t}$$

* به دست آمدن u_1' و u_2'

$$\to \frac{2(\sin^2 2t + \cos^2 2t)}{\cos 2t}\, u_2' = \frac{3}{\sin t} \to u_2' = \frac{3}{2} * \frac{\cos 2t}{\sin t}$$

$$\to u_1' = -\tan 2t \times \frac{3}{2}\,\frac{\cos 2t}{\sin t} = -\frac{3}{2}\,\frac{\sin 2t}{\sin t} = -3\cos t$$

* همانجاست که $u_1' = -3\cos t$

$$u_1 = \int -3\cos t\, dt = -3\sin t$$

* پس انتگرال‌ها هم بسته به ثابت‌ها معلوم ماند

$$u_2 = \int \frac{3}{2}\,\frac{\cos 2t}{\sin t}\, dt$$

* انتگرال گرفتن از u_1' و u_2'

$$u_2 = \int \frac{3}{2}\,\frac{\cos 2t}{\sin t}\, dt = \int \frac{3}{2}\,\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\, dt = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sin t} - 3\int \sin$$

$$= \frac{3}{2}\ln|\csc(t) - \cot(t)| + 3\cos(t)$$

$\frac{1}{\sin}$ کسکانت یا ←

* خب الحمدلله u_2 هم حاصل شد

$$\varphi(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$= -3\sin t \cos(2t)$$

$$+ \left(\frac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t| + \frac{3}{2}\cos t\right)\sin 2t$$

درس

۲۷

چهارشنبه

بهمن ۱۳۹۵

Wednesday

February 15 2017

۱۸ جمادی الاولی ۱۴۳۸

یک جواب خاص از معادله

$$y(t) = \varphi(t) + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$$

نا همگن

عام جواب معادله

$$y'' + 4y = \frac{3}{\sin t}$$

پس کلاً اگر $f(t)$ تابع خوبی نبود (ساده) از روش حدسی نمی‌شه رفت باید

از روش با پارامترهای متغیر وهم مثل همین u_1, u_2.

فصل ۴ معادلات ضریب ثابت مرتبه‌ی n

در این بخش معادلات و نتایج مربوط به معادلات ضریب ثابت مرتبه ۲ را به مرتبه n

تعمیم می‌دهیم. I) معادله همگن

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$\Rightarrow r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه را مشخص می‌کنیم

۱) به ازای ریشه‌های حقیقی و متمایز $r_1, r_2, \dots, r_k$ جواب مستقل خطی

$e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_k t}$ برای معادله وجود دارند.

۲) به ازای ریشه‌ی r با s بار تکرار جواب‌های مستقل e^{rt}،

te^{rt} ، t^2e^{rt} ، .... ، $t^{(s-1)}e^{rt}$ هستند.

۲۸ پنج شنبه
بهمن ۱۳۹۵
Thursday February 16 2017

۳) برای ریشه‌های مختلط $\alpha \pm \beta i$ جواب‌ها $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ، $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ هستند. نسبت به دلایلی ریشه‌های مختلط که همیشه جفت

$\alpha \pm \beta i$ هستند.
یعنی اگر $\alpha+\beta i$ ریشه است $\alpha-\beta i$ هم ریشه هست.

مثال:
$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$
$$y(0)=0 ,\ y'(0)=1 ,\ y''(0)=1$$
$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \rightarrow (r-1)^3 = 0$$
$$\rightarrow r_1, r_2, r_3 = 1$$

مطابق حالت ۲ (ریشه‌های تکراری) از همان ترتیب جوابها

$$\rightarrow y_1(t) = e^t ,\ \underbrace{te^t}_{y_2(t)} ,\ \underbrace{t^2e^t}_{y_3(t)}$$

جواب کلی
$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^t$$

با شرایط اولیه
$$y(0) = c_1 \times 1 = 0 \rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$
$$y(t) = (c_2 t + c_3 t^2)e^t \rightarrow y'(t) =$$

جمعه ۲۹
بهمن ۱۳۹۵
Friday February 17 2017

$$(c_2 t + c_3 t^2 + c_2 + 2c_3 t)e^t \Rightarrow y'(0) = c_2 \times 1 = 1 \rightarrow c_2 = 1$$

$$y''(t) = (2c_2 + 4c_3 t + c_2 t + c_3 t^2 + 2c_3)e^t$$

$$(p(t)e^t)' = (p' + p)e^t$$ نکته کنکوری مهم

$$y''(0) = (2c_2 + 2c_3) \times 1 = -1 \qquad 2c_2 + 2c_3 = -1$$

$$c_2 = +1$$
$$c_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(t - \frac{3}{2}t^2\right)e^t$$

II) معادله‌ی ناهمگن: خودتو صفحات قبل همه رو بررسی کردی در حد هفت نیم کیلو! با جواب هست نمی‌گیرم!

مثال ۱)

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t$$

$r_1 = r_2 = r_3 = 1 \Longrightarrow$ جواب همگن است e^t $\Longrightarrow \varphi(t) = ke^t \times t^3$

$$\varphi = ke^t t^3$$

$$\varphi' = (kt^3 + 3kt^2)e^t$$

$$\varphi'' = (kt^3 + 6kt^2 + 6kt)e^t$$

$$\varphi''' = (kt^3 + 6kt^2 + 6kt + 3kt^2 + 12kt + 6k)e^t$$

$\varphi''' - 3\varphi'' + 3\varphi' - \varphi = 4e^t$: حالا بذاریم تو معادله

$$[\cancel{kt^3} + \cancel{9kt^2} + \cancel{18kt} + 6k - \cancel{3kt^3} - \cancel{18kt^2} - \cancel{18kt} + \cancel{3kt^3} + \cancel{9kt^2} - \cancel{kt^3}]e^t = 4e^t$$

$$\Longrightarrow 6ke^t = 4e^t \Longrightarrow \boxed{k = \frac{2}{3}}$$

$\varphi(t) = \frac{2}{3}t^3e^t$ هر یک از این معادله همینطور است.

مثال ۲)

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 2\cos t + \sin t$$

$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (r^2+1)^2 = 0 \longrightarrow r = \pm i \longrightarrow$

$\cos t$, $\sin t$ ها همگن هستند به توان دو

$$\varphi(t) = (a\cos t + b\sin t)\, t^2$$

ساده‌ها همین رو اهم ضرب کنید در t^2 چون r دو بار است. ضرب کنیم چرا؟

مثال ۳: $y''' - y'' - y' + y = g(t)$

$\varphi(t) = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$ روش پارامترهاست !!

$s^3 - s^2 - s + 1 = s^2(s-1) - (s-1) = (s^2-1)(s-1)$

$= (s-1)^2(s+1) \Rightarrow s_1, s_2 = 1,\ s_3 = -1$

$y_1 = e^t \quad y_2 = te^t \quad y_3 = e^{-t}$

$\varphi' = u_1y_1' + u_1'y_1 + u_2y_2' + u_2'y_2 + u_3y_3' + u_3'y_3$

بازم از این فرض عجیبا کنیم که کاملا کار خودمونه:

فرض ما: $u_1'y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3 = 0$

$\Rightarrow \varphi' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_3y_3'$

$\varphi'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + u_3'y_3' + u_3y_3''$

کلک این است که u'ها رو بدیم صفر نداریم یعنی که (۲) ما

فرض دوباره: $u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_3'y_3' = 0$

سه فرض همیشه این u' هات در ادامه شما فرض هم مت بنویسم اینا را با دقت.

$\Rightarrow \varphi'' = u_1y_1'' + u_2y_2'' + u_3y_3''$

$\varphi''' = u_1'y_1'' + u_1y_1''' + u_2'y_2'' + u_2y_2''' + u_3'y_3'' + u_3y_3'''$

حالا جاگذاری در معادله

$\varphi''' - \varphi'' - \varphi' + \varphi = g(t)$

جاگذاری ⟶ ...

اگر این حالت را بلد نبودیم که حالتی که بلدیم ثابت ها را با ... !! به:

$$u_1' y_1'' + u_2' y_2'' + u_3' y_3'' = g(t)$$

حتماً کلاس شروط اضافه شده:

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' + y_3 u_3' = 0$$

$$y_1' \quad y_2' \quad y_3' = 0$$

$$y_1'' \quad y_2'' \quad y_3'' = g(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix}$$

اینها باید را به دست، باید ... شود

در روش پارامترهای متغیر برای حالت

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(t)$$

اگر $y_1, \ldots, y_n$، a_n جواب مستقل برای معادله همگن باشند داریم:

$$\begin{pmatrix} \text{ماتریس رونسکین} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow \{u_i'\}_{i=1\to n}$ ها $\longrightarrow \{u_i\}$ ها از انتگرال

$$\longrightarrow \varphi(t) = y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n$$

به نام خدا شروع جلسه ی ۸ آبان ۱۳۹۵

فصل ۵: حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها

تعریف ۱: سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ را یک سری توانی حول x_0 می گوییم.

تعریف ۲: عدد نامنفی ρ وجود دارد به طوری که سری فوق به ازای $|x-x_0|<\rho$ همگراست و به ازای $|x-x_0|>\rho$ واگراست. ρ را شعاع همگرایی می نامیم.

حالت های ممکن:
1) $\rho=0$
2) $\rho\neq 0$ کراندار
3) $\rho=\infty$

گاهی جواب معادلات دیفرانسیل به صورت سری است، صدق می دهیم و می بینیم سری همگراست.

تعریف ۳: معادله دیفرانسیل $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ را در نظر می گیریم. اگر در نقطه ی x_0، $P(x_0)\neq 0$ نقطه ی x_0 را یک نقطه عادی برای معادله می گوییم. در این صورت جواب های ~~...~~ کلی معادله به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ هستند.

مثال: روش عادی

$$y'' + y = 0 \longrightarrow r^2 + 1 = 0$$

$$\longrightarrow r^2 = \pm i \longrightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

روش سری:

$$P(x) = 1 \neq 0 \qquad x_0 = 0$$

خودمان x_0 را می‌گیریم.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

رفت به ۱

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

می‌خواهیم:

$$\underbrace{\sum (\quad) x^n}_{0} = 0$$

$y'' + y = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

تک‌تک صفر شوند، چرا باید؟

که مستقل خطی هستند پس ضرایب x^n باید ۰ باشند.

کاهش توان سیگمای اول را به گونه‌ای تغییر دهیم که فرم دو سیگما شبیه هم باشد.

داریم:

$n-2=m \qquad n=2,3,\ldots \qquad m=0,1,\ldots$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n\, x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)\,a_{m+2}\,x^{n}$$

$$\xrightarrow{y''+y=0} \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)\,a_{m+2}\,x^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\Big((k+2)(k+1)\,a_{k+2} + a_k\Big)x^k = 0 \quad (*)$$

ضریب

با توجه به اینکه $x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots$ مستقل خطی هستند باید

ضریب x^k صفر باشد تا مجموعا صفر شود جواب.

در رابطه ی $(*)$ به دلیل استقلال خطی توابع $x^0, x^1, x^2, \ldots$ باید ضرایب صفر شوند!

یعنی باید: برای تمام k ها

$$(k+2)(k+1)\,a_{k+2} + a_k = 0 \quad \forall k = 0,1,2,\ldots$$

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{-1}{(k+1)(k+2)}$$

می توانیم جمله هر k ای بدست بیاوریم کم کم

تا ببینیم a_k چطور میشه.

$$\left.\begin{array}{l} k=0 \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_0} = \dfrac{-1}{1\times 2} \\[2ex] k=2 \Rightarrow \dfrac{a_4}{a_2} = \dfrac{-1}{3\times 4}\end{array}\right\} \quad \frac{a_4}{a_0} = \frac{a_4}{a_2}\times\frac{a_2}{a_0} = \frac{-1}{3\times 4}\times\frac{-1}{2\times 1} = \frac{(-1)^2}{1\times2\times3\times4}$$

$$\frac{a_{2\times(i)}}{a_0} \to a_{2i} = \frac{(-1)^i}{(2i)!}$$

$$\Rightarrow a_{2i} = \frac{(-1)^i}{(2i)!} \times a_0$$

$$k=1 \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{-1}{2\times 3}$$

$$k=3 \quad \frac{a_5}{a_3} = \frac{-1}{4\times 5}$$

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{(-1)^2}{2\times 3\times 4\times 5}$$

$$\frac{a_{2i+1}}{a_i} = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \qquad a_{2i+1} = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} a_1$$

می‌بینیم که فرمول برای زوج و فرد متفاوت شد. اختلاف جملات حتما باید

چون تعریف نشده اگر $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1}$ که به دنباله دست پیدا می‌کرد.

بنابراین اندیس‌های زوج و فرد دنباله a_k جدا شد ←

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} x^{2i+1}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}}_{\cos(x)} a_0 + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}}_{\sin(x)} a_1$$

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

تعریف: اگر تابع $P(x)$ در نقطه‌ی x_0 برابر با صفر باشد نقطه‌ی x_0 را یک نقطه‌ی تکین برای معادله‌ی $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ می‌گوییم در این حالت سری تیلور برای نمایش جواب قابل استفاده نیست.

تعریف ۵: اگر در نقطه‌ی تکین x_0 حدهای $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\left(\frac{Q(x)}{P(x)}\right)$ و $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$، موجود و کراندار باشند، نقطه‌ی x_0 را یک نقطه‌ی تکین منظم می‌گوییم. در نقاط تکین منظم جواب با فرم سری مرتبط هستند.

مثال ۱:
$$x^2y''+2axy'+by=0$$

$$P(x)=x^2=0 \Rightarrow x_0=0$$

$$Q(x)=ax \quad R(x)=b$$

$$\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{ax}{x^2}=a$$ موجود و کراندار

$$\lim_{x\to 0}(x-0)^2\frac{b}{x^2}=b$$ موجود و کراندار

نقطه‌ی تکین $x_0=0$ منظم است.

حل معادله ـ مرور |||| تغییر متغیر $x=e^t$

$$y''_t + (a-1)y'_t + by = 0 \longrightarrow \begin{cases} r_1, r_2 = x^{r_1}, x^{r_2} \\ r_1=r_2, \quad x^{r_1}, (\ln x)x^{r_1} \\ \alpha\pm\beta i: \quad x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) \\ \qquad\qquad x^{\alpha}\sin(\beta\ln x) \end{cases}$$

x^2

(حل نکردیم شرط نقطه تکین منتظم بودن $x=0$ است $\ln x$ دار
را در جلسه‌ی بعد حل با قدمی.

مثال ۲: $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$

$x_0=1$ را بررسی کنید که منتظم است یا نه؟

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{x+1} = 1$$ موجود و کراندار

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x^2)} = 0$$ موجود و کراندار

نقطه‌ی $x_0=1$ تکین منتظم است.

* جواب‌های سری حول نقاط تکین منتظم

۱) اگر x_0 نقطه‌ی تکین معادله‌ی $P(x)y''+Q(x)y' + R(x)y=0$ باشد

آنگاه ۰، صفر، نقطه‌ی تکین معادله‌ی زیر است:

۱ است چون مشتق $\frac{dt}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$t = x - x_0$

$$P(t+x_0)\,y'' + Q(t+x_0)\,y' + R(t+x_0)\,y = 0$$

۲) $x_0 = 0$ تکین منظم

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}$ موجود و کراندار

تابع $x\frac{Q(x)}{P(x)}$ تیلور است .

$$x\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} \xrightarrow{\text{تیلور و کراندار}} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n$$

$$\xrightarrow[\;/P(x)\;]{\times(x^2)} x^2P(x)\,y'' + x^2Q(x)\,y' + x^2R(x)\,y = 0$$

$$x^2y'' + \underbrace{x^2\frac{Q(x)}{P(x)}}\,y' + \underbrace{x^2\frac{R(x)}{P(x)}}\,y = 0$$

سری تیلور دارد   سری تیلور دارد

$$x^2 y'' + x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n}_{A(x)} y' + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n}_{B(x)} y = 0$$

$$x^2 y'' + A(x)\, x y' + B(x)\, y = 0$$

مشابه کوشی اویلر ولی اینجا ثابت نیستند a و b سری‌های توانی قرار دارند.

ضرب توانی x در جواب کوشی اویلر : حدس جواب

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_n = ? \quad r = ?$$

$$\begin{cases} a_n = ? \\ r = ? \end{cases} = \sum_{x=0}^{n} a_x^{n} x^{n+r}$$

$$x^2y'' + x\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n}_{A(x)} y' + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n}_{B(x)} y = 0$$

$$x^2y'' + A(x)\,xy' + B(x)\,y = 0$$

شبیه کوشی اویلر، به جای ثابت‌های a و b سری‌های توانی قرار دارند.

ضرب توانی x جواب کوشی اویلر : حدس جواب

$$y(x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_n=? \quad r=?$$

س

$$\begin{cases} a_n=? \\ r=? \end{cases} = \sum_{x=0}^{n} a_n x^{n+r}$$

به نام خدا شروع جلسه‌ی ۱۰ آبان ـ

رفع اشکال و حل تمرین، سه‌شنبه، دوشنبه ۳ تا ۵ اتاق ۲۱۷

در مورد امتحان هر چیزی سر جلسه گفته شده باشد همه تقلید ندارد. اما مسائل اهمیت

روش تدریس اویلر است.

حل معادلات به روش سری ها - مروری:

معادله ی $p(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ را درنظر میگیریم.

۱) اگر $p(x_0)\neq 0$ باشد پاسخ ها به صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ در معادله جایگذاری می شوند.

۲) اگر $p(x_0)=0$ باشد، x_0 را یک نقطه ی تکین برای معادله گوییم.

اگر حدهای $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{p(x)}$, $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{p(x)}$ موجود و متناهی باشند، x_0 نقطه ی تکین منظم است.

در این صورت جواب به فرم $\sum^{\infty}a_n x^{n+r}$ درنظر میگیریم.

* اگر $x_0\neq 0$ باشد با تغییر متغیر $t=x-x_0$ نقطه ی تکین معادله ی جدید صفر خواهد بود. برای سادگی همیشه x_0 را صفر فرض کنیم.

$(x-0)^{n+r}$ تبدیل به نقطه تکین ۰ با تغییر

تصور می کنیم

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} \quad r=?\quad a_n=?$$

$$p(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

$$\xrightarrow[\div p(x)]{\times x^2} x^2y''+\frac{x^2Q(x)}{p(x)}y'+\frac{x^2R(x)}{p(x)}y=0$$

سری تیلور همگرا داشته باشیم

و حد دارد و موجود است

$$\lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} \rightarrow x\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 R(x)}{P(x)} \rightarrow x^2\frac{R(x)}{R(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n .$$

$$\begin{cases} x^2 y'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) y' + \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n y = 0 \quad (*) \\ y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \end{cases}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$r = 0, 0$ مثال $\begin{cases} y = a_0 x^{\frac{1}{2}} + \dots \\ y' = \frac{1}{2} a_0 x^{-\frac{1}{2}} + \dots \end{cases}$

در صفر
سعی در این حالت اند
شروع می شود.

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{r+n-2}$$

حال y ، y' ، y'' در $(*)$ جاگذاری می شوند.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-\cancel{2}} + x \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \left(\sum_{n=0} (n+r) a_n x^{n+r-1}\right)$$

زیرا ضرب x^2 در شود

$$+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+\left(\sum q_n x^n\right)\left(\sum (n+r)a_n x^{n+r}\right)$$
$$+\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}=0$$

حت حالا می‌دانیم که اگر برای مثال $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ صفر شود

می‌دانیم که $b_n=0$ خواهد بود (به ازای هر n) پس:

حال می‌گوییم که ضریب x^r باید صفر باشد پس:

$$r(r-1)a_0x^r+q_0 r a_0 x^r+r_0 a_0 x^r=0$$

$$\forall x \to \left(r(r-1)a_0+q_0 r a_0+r_0 a_0\right)x^r=0$$

$$a_0\left[r(r-1)+q_0 r+r_0\right]=0 \longrightarrow$$ در صورتی که $a_0=0$ شد

یا $\begin{cases} a_0=0 \\ r^2+(q-1)r+r_0=0 \end{cases}$

یک ضریب از تابع جواب جهت

اجباری آنست شدن این باعث از دست رفتن جواب های دیگر می‌شود.

بنابراین معادله‌ی $r^2+(q_0-1)r+r_0=0$ را می‌پذیریم.

پس اگر r جواب معادله‌ی $r^2+(q_0-1)r+r_0=0$ باشد با جایگذاری مقادیر r در فرم $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$ کافی است a_n ها را پیدا کنیم.

$$x\frac{Q(x)}{P(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n \longrightarrow q_0=?$$

$$=q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots \Rightarrow q_0=\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}$$

همچنین داریم که:

$$x^2\frac{R(x)}{P(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}r_n x^n$$

$$\longrightarrow r_0=\lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)}$$

حال که r_0 و q_0 را داریم.

الگوریتم پیدا کردن جواب‌های سری حول نقاط تکین

گام اول: $q_0=\lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)}$ و $r_0=\lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)}$

را محاسبه می‌کنیم، اگر q_0، r_0 موجود و متناهی باشند، نقطه‌ی صفر نقطه‌ی تکین منظم است.

گام دوم: با حل معادله‌ی $r^2+(q_0-1)r+r_0=0$ ریشه‌ی r_1 و r_2 را حساب می‌کنیم.

گام سوم (در حالت کلی): جواب‌ها با جایگذاری $y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$ ، $y_2=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$ ، در معادله و قاعده‌ی a_n ، b_n ها بدست می‌آیند.

حالت‌های استثناء : $r_1=r_2=r$ ، $r_2-r_1\in \mathbb{N}$

مثال : $2x^2y''-xy'+(1+x)y=0$

$p(x)=0 \xrightarrow{x=0}$ تنها نقطه‌ی تکین

$x=0$

اگر بخواهید جواب تکین حل کنید هم تکین بودن را چک کنید هم منظم بودن

← صورت سؤال: در همسایگی یک نقطه‌ی تکین منظم (تکین منظم) را باید بگوید

حالا تکین بودم، چک کنیم منظم بودن تو:

$q_0=\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0} x\times\frac{-x}{2x^2}=-\frac{1}{2}$

$r_0=\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\times(1+x)}{2x^2}=\frac{1}{2}$

موجود و متناهی

نقطه تکین منظم است.

گام دوم: $r^2+(q_0-1)r+r_0=0$

$$r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}=0 \quad \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس y_n ها به صورت مقابل هستند:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y_2(x)=\sum_{n=}^{\infty} x^{n+\frac{1}{2}}$$

پس جایگذاری کنیم:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0x+a_1x^2+a_2x^3$$

$$y_1'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = a_0+2a_1x+\cdots$$

و با جایگذاری حل می‌کنیم

$$y_1''=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)a_n x^{n-1}$$

* در مشتق دوم بعد از مشتق‌گیری اندیس (n) یک واحد اضافه می‌شود که از سری اصلی، (قبل از مشتق) توان x از صفر شروع شود.

چون با $n=0$ در y' جمله a_0 را داشتیم که ... .

$$2x^2y''-xy'+(1+x)y=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n(n+1)x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}=0$$

این می بود که :)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+1}$$

$$@\, n=0 \Rightarrow -a_0 x + a_0 x = 0 \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\left[2n(n+1)a_n - (n+1)a_n + a_n + a_{n-1}\right] = 0$$

$$\longrightarrow (2n^2+2n-n-1+1)\, a_n + a_{n-1} = 0$$

$$\longrightarrow (2n^2+n)\, a_n + a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1$$

که رسیدیم به این رابطه باز بنویس

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-1}{n(2n+1)} \quad \forall n \geq 1$$

$$n=1 \quad \frac{a_1}{a_0} = \frac{-1}{1\times 3} \qquad n=2 \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{2\times 5}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-1}{n\times(2n+1)}$$

ضرب کنید

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \times \cancel{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} \times \cdots \times \cancel{\frac{a_2}{a_1}} \times \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_n}{a_0}$$

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{(-1)^n}{1\times\cdots\times n\times(3\times 5\times\cdots\times(2n+1))} = \frac{(-1)^n}{n! \times \frac{(2n+1)!}{2\times\cdots\times 2n}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\cancel{n!} \times \frac{(2n+1)!}{2^n \times \cancel{n!}}} \Rightarrow \frac{a_n}{a_0} = \frac{(-1)^n \times 2^n}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} \Rightarrow a_n = \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} a_0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

تموم شد.

الگوریتمش پیچیده نیست اما طولانیه :)

Saturday
March 11 2017
۱۲ جمادی الثانیة ۱۴۳۸

شنبه ۲۱ اسفند ۱۳۹۵

$$= \frac{(-1)^n}{\cancel{n!}\times \frac{(2n+1)!}{2^n \times \cancel{n!}}} \Rightarrow \frac{a_n}{a_0} = \frac{(-1)^n \times 2^n}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} \Rightarrow a_n = \frac{(-2)^n}{(2n+1)!} a_0 .$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$ موفق شد.

الگوریتمی بیمیو است اما طولانیه :(

به نام خدا شروع جلسه ۱۵ آبان (موش سری جدا الگوریتم!)

گام ۱) اگر $p(x_0) = 0$ (نقطه تکین است) و حدهای $q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)}$ و $r_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)}$ موجود و متناهی باشند، x_0 نقطه تکین منظم است.

گام ۲) با حل معادله ی مشخصه که $r^2 + (q_0 - 1) r + r_0 = 0$، r_1، r_2 را حساب می کنیم.

گام ۳) با جایگذاری جواب ها که $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$، $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$ هستند، ضرایب را حساب می کنیم.

$r_1 = 1 \quad r_2 = \frac{1}{2}$

$r^2 + (q_0 - 1)r + r_0 = r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0$

حال (الاسد: $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$

گام ۱) نقطه صفر تکین منظم است $q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{x \times q}{p(x)} = \lim \frac{x \times -x}{2x^2} = -\frac{1}{2}$

گام ۲) ریشه های معادله مشخصه - $r_0 = \lim_{x\to 0} x^2 \frac{1+x}{2x^2} = \frac{1}{2}$

گام ۳) $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$, $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}$

روش معلمی پیش

حالا y_2 رو میذاریم تو معادله، $\{b_n\}$ را حساب می کنیم.

$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}} \qquad y_2' = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \times (n+\frac{1}{2}) x^{n-\frac{1}{2}}$

$y_2'' = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n \times (n+\frac{1}{2}) \times (n-\frac{1}{2})}_{(n^2-\frac{1}{4})} \times x^{n-\frac{3}{2}}$

حالا میذاریم تو معادله: $2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n^2-\frac{1}{4}) b_n x^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\frac{1}{2}) b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{3}{2}} = 0$$

این باید توان این شکل داره ما، تغییر بدیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n+\frac{1}{2}}$$

به خاطر استقلال خطی ضریب عام x^i ها باید صفر باشد.

Monday
March 13 2017
۱۴۳۸ ۱۴ جمادي الثانية

توان ها متفاوت x

دوشنبه
اسفند ۱۳۹۵

۲۳

$$@\, n=0 \quad \left(-\frac{1}{2}b_0 - \frac{1}{2}b_0 + b_0\right)x^{1/2} = 0$$

$$-\frac{1}{2}b_0 - \frac{1}{2}b_0 + b_0 = 0 \checkmark$$

$$\forall n \geq 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)b_n - \left(n+\frac{1}{2}\right)b_n + b_n + b_{n-1}\right) x^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

استقلال خطی

$$\left(2\left(n^2-\frac{1}{4}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) + 1\right)b_n + b_{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2n^2 - \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2} + 1\right)b_n + b_{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2n^2 - n)b_n + b_{n-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{-1}{n(2n-1)} \quad n \geq 1$$

حب اصلاً اندیس ۲ یک هست و تستی اندیس نداریم.

$$n=1 \quad \frac{b_1}{b_0} = \frac{-1}{1\times 1} = -1$$

$$n=2 \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{-1}{2\times 3}$$

$$\frac{b_n}{b_0} = \frac{(-1)^n}{\underbrace{(1\times 2\times \cdots \times n)}_{n!}(1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-1))}$$

$$\frac{b_n}{b_0} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-1) = \frac{(2n-1)!}{2\times 4\times \cdots \times (2n-2)}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}\times (n-1)!}$$

Scanned by CamScanner

سه شنبه
اسفند ۱۳۹۵

Tuesday
March 14 2017

$-(-1)^{n-1}$

$$\frac{b_n}{b_0}=\frac{(-1)^n}{n!\,\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}}=\frac{(-1)^n\times 2^{n-1}}{n\times(2n-1)!}=\frac{-(-2)^{n-1}}{n\times(2n-1)!}$$

$$b_n=\frac{-(-2)^{n-1}}{n\times(2n-1)!}\,b_0 \longrightarrow y_2=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-2)^{n-1}}{n(2n-1)!}\,b_0\,x^{n+\frac{1}{2}}=b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-2)^{n-1}}{n(2n-1)!}\,x^{n+\frac{1}{2}}$$

ضریب آزاد ، بخاطر همگن بودن معادله $Py''+Qy'+Ry=0$

حذف باید

فقط اسم سری هر ضریب جدا جدا است.

$$y_2=b_0x^{\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^{n+\frac{1}{2}}=b_0x^{\frac{1}{2}}+\sum_{n=1}\frac{-(-2)^{n-1}}{n(2n-1)!}\,b_0x^{n+\frac{1}{2}}$$

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(2n)!}\,b_0x^{n+\frac{1}{2}}$$

نحوه نوشتن سری

تساوی

کلاً بدی این روش سری اینه که حالتشما با (۲) بالا و مثلاً ، خوب ببینه.

چون صریح نیست . مثلاً تشکیل جواب می‌شد $y_2=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ حالا اینطوری شد

راحت ترش با اینکه الان دارم

حالا اینو چیکار کنی؟ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(2n)!}$

توجه در مسائلی که جواب به صورت سری بدست می‌آید برای یافتن جواب تابع حقیقی در یک نقطه لازم است تعدادی سری جمعی می‌شود. برای این نیاز به شبه کد داریم:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad y(x^*) \simeq ?$$

$$\sum_{n=0}^{k} a_n (x^*)^{n+r} \xrightarrow[\text{همگرا شود}]{} S$$

$|S_{k+1} - S_k| < \varepsilon$

$\left| a_{k+1} (x^*)^{k+1+r} \right| < \varepsilon$

$\rightarrow k \geq$ عدد شد 107

$S = 0$
while $|S_{new} - S| > \varepsilon$
$S_{new} = S + a_{new}$
~~$e = |S_{new} - S|$~~
end

for $k = 1, 107$

این برنامه‌ها کلی باشد ساده که دیگه جلد صد بیت اطلاعات کنید هی بیله وارد کنید.

بعضی حالت‌های خاص (r_1, r_2) متناسب با آنها:

بدون اثبات هم چیزی را می‌بیندیم.

۱) اگر r_1 و r_2 دو عدد حقیقی متمایز باشند، جواب حول نقطه منظم x_0 به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \text{ است.}$$

$(r_1 - r_2 \neq k)$ مشروط

به این که هم‌عدد نباشد:

۲) ریشه‌ی مضاعف $r_1 = r_2 = r$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r} + y_1 \ln|x|$$

همان قبلیه

۳) ریشه‌ها به اندازه‌ی عدد صحیح تفاوت کنند. $r_1 > r_2$

$r_1 > r_2$

$r_1 - r_2 = k \in \mathbb{N}$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = \alpha\, y_1 \ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$

ممکنه α صفر شه

ریشه‌ی بزرگتر $r_1 \geq r_2$

نکته: این سه حالت بالا انقدر طولانی هست که در امتحان نمیاد در حد کانفیدنس.

مثال:

$$x(x+1)^2 y'' - (x+1) y' - xy = 0$$

$x_0 = -1$ رجاب سر حول نقطه‌ی استا ۳ حل.

$$p_0 = \lim_{x \to -1} (x+1) \frac{-(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$r_0 = \lim_{x \to -1} (x+1)^2 \frac{-x}{x(x+1)^2} = -1$$

تکین منظم

$r^2 + (1-1)r + 1 = 0$ → $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ ، $r_1 - r_2 = 2 \in \mathbb{N}$

صورت خاص

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+1}$$

$$t = x+1 \iff x = t-1 \qquad \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\begin{cases} (t-1)t^2 y'' - ty' - (t-1)y = 0 \\ y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \end{cases}$$

$$(t^3 - t^2)y'' - ty' - (t-1)y = 0$$

$$y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n t^n \qquad y_1'' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, a_n t^{n-1}$$

این یوست که چرا؟

صورت‌شان از اثر شده چون ضریب توان t صفر می‌شود و اصلاً t^{-1} نداریم توالی.

حل بازگرد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_n t^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_n t^{n+1}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1}$$

$a_1 = -\frac{1}{3} a_0$ و $n \geqslant 2$

خوب حالا این میشه: $(n^2-n-1)\,a_{n-1} - (n^2+2n)\,a_n = 0$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^2-n-1}{n^2+2n} \quad n \geqslant 2 \Longrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{8}$$

$$\longrightarrow a_2 = \frac{1}{8} a_1 = -\frac{1}{24} a_0$$

$a_1 = -\frac{1}{3}a_0$ و $n \geq 2$

خوب حالا این می‌شد: $(n^2-n-1)a_{n-1} - (n^2+2n)a_n = 0$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^2-n-1}{n^2+2n} \quad n \geq 2 \Longrightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{1}{8}a_1 = -\frac{1}{24}a_0$$

منابع جدید شروع جلسه‌ی ۱۷ آبان (نمونه سوال تا آخر فصل ۴ رو هم از سایت
mehr.sharif.ir/~n.bagheripour → teaching → ode

حل سری حول نقاط تکین منظم ـ مرور

گام ۱. بررسی اینکه آیا x_0 تکین منظم است یا نه. در صورتی که x_0 تکین منظم بود تغییر متغیر $t = x - x_0$ را استفاده می‌کنیم. چون صفر نقطه‌ی تکین معادله‌ی جدید می‌شود.

گام ۲. محاسبه‌ی r_1, r_2 از معادله‌ی مشخصه

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0$$

همون lim است

گام ۳. محاسبه a_n با جایگذاری جواب به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$$

مثال. (ادامه)

$$x(x+1)^{2}y'' - (x+1)y' - xy = 0 \qquad x_0 = -1$$

$$q_0 = 1 \quad r_0 = -1 \quad r_1 = 1 \,,\; r_2 = -1$$

$$r_1 - r_2 = 2 \in \mathbb{N} \qquad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^{n+1}$$

$n+2$

$x \to -1$

$$t = x - x_0 = x - (-1) = x + 1$$

تغییر متغیر بدهیم

$$\begin{cases} (t^{3} - t^{2})y'' - ty' - (t-1)y = 0 \\ y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n t^{n} \end{cases}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n\, a_n t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, a_n t^{n+1}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = 0$$

حالا اینا رو توانشو $n+1$ درست می‌کنیم $n+1$ ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, a_n t^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_{n-1} t^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{n+1}$$

۱۴۰۱ اسفند

$$\rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_{n-1}t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\,a_n t^{n+1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n t^{n+1}$$

[illegible] ۴۴۴ تا ۲ [illegible]

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n-1} = 0$$

$@\, n=0 : -a_0 + a_0 = 0 \checkmark$

$@\, n=1$

$-2a_1 - 2a_1 - a_0 + a_1 = 0$

$-3a_1 - a_0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{1}{3}a_0}$

حالا که حالت $n=0$ و $n=1$ را دستی بررسی کردیم حالا می‌توانیم

سیگمارو از $n=2$ شروع کنیم و

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)a_{n-1} - (n+1)n a_n - (n+1)a_n - a_{n-1} + a_n\right)t^{n+1} = 0$$

$$\left((n^2-n-1)a_{n-1} - (n^2+n+n+1-1)a_n\right) = 0$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^2-n-1}{n^2+2n} \qquad \forall n \geq 2 \longrightarrow$$

در محاسبات بعدی مشکل [illegible]

تا اینجا حل شده [illegible]

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{4-2-1}{4+4} = \frac{1}{8}$$

$$a_2 = \frac{1}{8}a_1 = \frac{-1}{24}a_0$$

۲۲ اسفند

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} = a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \cdots$$

$$= a_0\left(t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{24}t^3 + \cdots\right)$$

نقطه ی ما صفر نباشد $x=t+1$ است پس جایگذاری ی زیر انجام شد

$$y= a_0\left((x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{1}{24}(x+1)^3 + \cdots\right)$$

قدرت این سری محدود است.

* معادله ی بسل: معادله دیفرانسیل $x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0$

را معادله ی بسل مرتبه ی v می گوییم. (کلی حرف زد که بسل چقدر معادله مفیدی

است و چقدر حل می کند...) (توسط این دانشمندان)

بررسی نقاط تکین: $x^2=0 \longrightarrow x=0$ یه نقطه تکین داره قبلا

گفتم فقط x^2 رو صفر میکنه

حالا ببینیم منظم هست یا نه؟

$$q_0=\lim_{x\to 0} x\,\frac{x}{x^2}=1$$

$$r_0=\lim_{x\to 0} x^2\,\frac{x^2-v^2}{x^2}=-v^2$$

تکین منظم است

معادله مشخصه شکل بده:

$$r^2+(1-1)r-v^2=0 \longrightarrow$$

$$r^2-v^2=0 \longrightarrow \begin{cases} r_1=v \\ r_2=-v \end{cases}$$

۱۳ اسفند

حالت های خاص

$r_1 = r_2 = 0$ ریشه های صفر و ریشه های مضاعف

$r_1 - r_2 = 2\nu \in \mathbb{N}$

$\nu \in \mathbb{N}$ حالت نقطه تعمیم بدهیم

$\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ اینجا علامت ... ادامه

نمونه های معادله ی بسل مربوط به حالت های خاص در ادامه

بررسی می شوند. در حالت اول $\nu = 0$ است. در حالت سوم

به ترتیب $\nu = 1$ و $\nu = \frac{1}{2}$ را آزمایش می کنیم.

مثال ۱: معادله ی بسل مرتبه ی صفر $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$

$r_1 = r_2 = 0 \longrightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$

ضرب در y, y', y'' شوند

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$

$@ n=1 \quad a_1 = 0$

$\forall n \geq 2 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left((n^2 - n) a_n + n a_n + a_{n-2} \right) x^n = 0$

استقرا در نظر

در استقلال خطی

۲۴ اسفند

$$n^2 a_n + a_{n-2} = 0 \longrightarrow \frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{-1}{n^2} \quad n \geq 2$$

$$n=2 \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{-1}{2^2}$$

$$n=4 \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{-1}{4^2} \qquad \frac{a_2}{a_0} \times \frac{a_4}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = \frac{a_{2n}}{a_0} = \frac{(-1)^n}{(2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n)^2}$$

$$\frac{a_{2m}}{a_{2m-2}} = \frac{-1}{(2m)^2} \qquad = \frac{(-1)^n}{(2^n \times n!)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n \times (n!)^2}$$

این n ها m هستن
تست اشتباه
من نوشتم :)

$$\longrightarrow a_{2n} = \frac{(-1/4)^n}{(n!)^2} a_0$$

حالا ضریب فردها رو در بیاریم :) لطفا خوشبختانه $a_1 = 0$ به دست

لذا یه اتفاق خوب بدیم:

$$n \text{ فرد} \longrightarrow n^2 a_n + a_{n-2} = 0$$

$$n=3 \quad 9a_3 + \overset{a_1=0}{a_1} = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$n=5 \quad 25 a_5 + a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = 0$$

پس همه ضریب فردها صفر شد.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{(n!)^2} a_0 x^{2n} = a_0 \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{(n!)^2} x^{2n}}$$

جواب اول معادله بسل مرتبه صفر $J_0(x)$

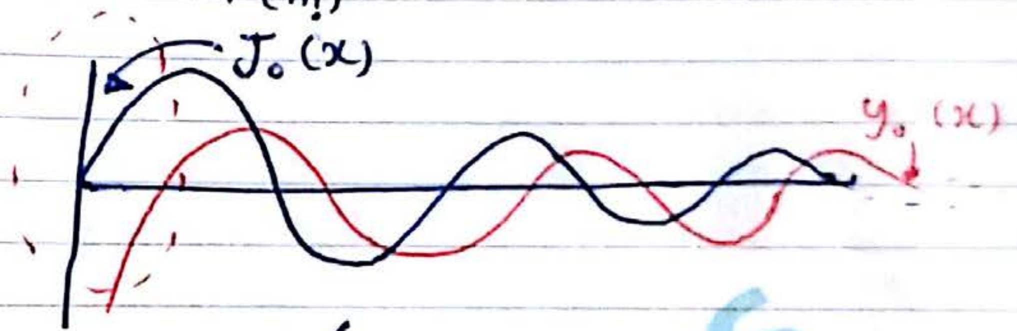
۲۵ اسفند

جواب دوم: حالا اساسش زیاده این جوابش، کیم می‌باشه نمی‌خواد، خود استاد هم نوشت،

$$y_2 = \ln|x|\, y_1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$Y_0(x)$

$$\begin{cases} b_{2n+1} = 0 \\ b_{2n} = \dfrac{(-1)^{n+1} H_n}{4^n (n!)^2} \end{cases} \qquad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$



حتی بگم نمودار اینا رو بگم که مانشون چیه. بین هر دو جواب یکی، اون یکی یه جواب داره،

* دامنه نوسان هر دو نزولی

دامنه نوساناشون یکسانه.

* هر کدوم بین هر دو ریشه‌ی اون یکی یک ریشه داره،

مثال ۲: معادله‌ی بسل مرتبه‌ی 1

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1) y = 0$$

$r_1 = 1 \ , \ r_2 = -1$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \qquad y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n$$

$$y_1'' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, n\, a_n x^{n-1}$$

Time Travel :)

$$x^2 y_1'' + x y_1' + (x^2-1) y_1 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n\, a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+3}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$@\, n=0 :\ a_0 - a_0 = 0$

$@\, n=1 :\ 2a_1 + 2a_1 - a_1 = 0 \longrightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$\forall n \geqslant 2 \longrightarrow \Big((n^2+n)a_n + (n+1)a_n + a_{n-2} - a_n\Big) = 0$

$(n^2+2n)\, a_n + a_{n-2} = 0 \longrightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-2}} = \dfrac{-1}{n(n+2)}$

$n=1 \quad a_1 = 0 \longrightarrow a_3 = 0 \longrightarrow \dots \quad a_{2n+1} = 0$

$n=2 \longrightarrow \dfrac{a_2}{a_0} = \dfrac{-1}{2\times 4}$

$\vdots$

$\dfrac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = \dfrac{-1}{2n(2n+2)}$

$\dfrac{a_{2n}}{a_0} = \dfrac{(-1)^n}{(2\times \dots \times 2n)(4\times \dots \times (2n+2))}$

$\dfrac{a_{2n}}{a_0} = \dfrac{(-1)^n}{(2^n \times 1\times 2\times \dots \times n)(2^n \times 2\times 3 \times \dots \times (n+1))}$

$= \dfrac{(-1/4)^n}{n!\,(n+1)!} \qquad y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$

۴ سه شنبه
آبان ۱۳۹۵

Tuesday
October 25 2016

که اینو را خودتون خوب توجه کنید :!

۲

$$y_1(x) = \sum a_{2n} + \cancel{\sum a_{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!\,(n+1)!}\, x^{2n+1}$$

$$J_1(x)$$

x^{n+1}

به تـوزیع ۲n ـه جمعیت ؟

نگاه اشو را خودتون خوب توجه کنید!

۴ سه شنبه
آبان ۱۳۹۵

$$y_1(x) = \sum a_{2n} + \cancel{\sum a_{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/4)^n}{n!(n+1)!} x^{2n+1}$$

$J_1(x)$

ضرب ۲n + چه خاصیت؟

شروع جلسه ۲۲ تا ۳

ادامه تکمیل سری جلسه قبل رسیدن به معادله

معادله ی بسل مرور:

۱) تعریف $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ بسل مرتبه ی x

۲) نقاط تکین $r_1 = \nu$ تکین منظم $r_2 = -\nu$

بسل مرتبه ی 1 (داریم)

$J_1(x)$
$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{4^n n!(n+1)!} x^{2n+1}$$
$\nu = 1$ $r_1 - r_2 = 2 \in \mathbb{N}$

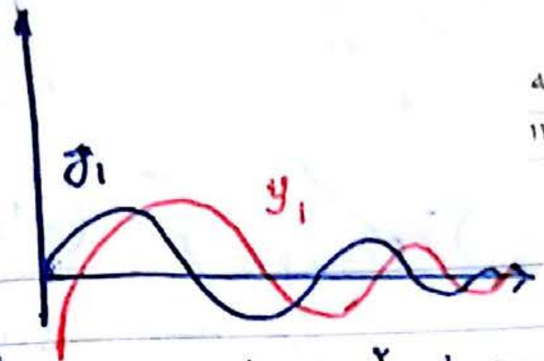
$$y_2 = \text{بدست نیاوردیم اینو} = \alpha \ln|x| y_1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1}$$

شکل دوم در نظر گرفتیم.

من چرا بدست نمی آید؟ آقا! را حل کنیم!

$b_{2n+1} = 0$ $y_1(x)$ $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots$

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(H_n + H_{n-1})}{4^n n!(n-1)!}$$



مثال ۳:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

$$\nu = \frac{1}{2} \qquad r_1 - r_2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \in N$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1/2} \longrightarrow \begin{cases} y_1' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) a_n x^{n-1/2} \\ y_1'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - 1/4) a_n x^{n-3/2} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) a_n x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n x^{n+1/2}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+5/2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} a_n x^{n+1/2} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+1/2} \Rightarrow \begin{cases} @\, n=0 \quad -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{4}a_0 \\ @\, n=1 \quad \frac{3}{4}a_1 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{1}{4}a_1 = 0 \\ \qquad \Rightarrow a_1 = 0 \end{cases}$$

هم جمع [illegible] شد

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\left(n^2 - \frac{1}{4}\right) a_n + \left(n + \frac{1}{2}\right) a_n - \frac{1}{4} a_n + a_{n-2} \right) x^{n+1/2} \longrightarrow (n^2+n) a_n + a_{n-2} = 0$$

$a_1 = a_3 = \dots = 0$

مستقل خطی

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{-1}{n(n+1)} \qquad n = 2k \to$$

$$n=2k \rightarrow \begin{cases} n=2 & \dfrac{a_2}{a_0} = \dfrac{-1}{2\times 3} \\ n=4 & \dfrac{a_4}{a_2} = \dfrac{-1}{4\times 5} \end{cases}$$

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = \frac{-1}{2k(2k+1)} \Rightarrow \frac{a_{2k}}{a_0} = \frac{(-1)^k}{2\times 3\times 4\times 5\times \cdots \times 2k \times 2k+1}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{a_{2k+1}}^{\,0} x^{2k+\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow y_1 = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+\frac{1}{2}}$$

این سری تیلورش شبیه چیه؟
حتما به تیلور سینوس شبیه

$$y_1 = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{a_0 \sin x}{\sqrt{x}}$$

فرمول بسته

گاهی حالت ها که بسته میشه این ترکیبا.
(بی لحظه:)

$$r_1 - r_2 = 1 \in \mathbb{N}$$

$$* y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-\frac{1}{2}} \quad (\alpha = 0)$$

$$y_2' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\tfrac{1}{2}) b_n x^{n-\frac{3}{2}}$$

$$y_2'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2}) b_n x^{n-\frac{5}{2}}$$

$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) b_n x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (n-\frac{1}{2}) b_n x^{n-\frac{1}{2}}$

$+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{3}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} b_n x^{n-\frac{1}{2}} = 0$

$\sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{n-\frac{1}{2}}$

حالا ضرایب رو دربیار:

$@\, n=0 : (\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) b_0 = 0 \checkmark$

$@\, n=1 : (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) b_1 = 0 \checkmark$

$@ \rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \left((n^2 - 2n + \frac{3}{4} + n - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) b_n + b_{n-2} \right) x^{n-\frac{1}{2}} = 0$

مستقل خطی

$\frac{b_n}{b_{n-2}} = \frac{-1}{n^2 - n}$

$n = 2k \longrightarrow \frac{b_2}{b_0} = \frac{-1}{2\times 1} \qquad \frac{b_{2k}}{b_{2k-2}} = \frac{-1}{2k(2k-1)}$

$\Rightarrow \frac{b_{2k}}{b_0} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$

$n = 2k+1$

$\frac{b_3}{b_1} = \frac{-1}{3\times 2}$

$\vdots$

$\frac{b_{2k+1}}{b_{2k-1}} = \frac{-1}{2k(2k-1)}$

$\frac{b_{2k}}{b_0} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$

$n=2k+1$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b_3}{b_1}=\dfrac{-1}{2\times 3}\\ \vdots \\ \dfrac{b_{2k+1}}{b_{2k-1}}=\dfrac{-1}{(2k+1)2k}\end{array}\right\} \longrightarrow \frac{b_{2k+1}}{b_1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty} b_{2k}\, x^{2k-\frac{1}{2}}+\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\, x^{2k+\frac{1}{2}}$$

$$=b_0\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k-\frac{1}{2}}}_{\frac{\cos x}{\sqrt{x}}}+b_1\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+\frac{1}{2}}}_{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}$$

$$y_2=\frac{b_0\cos x+b_1\sin x}{\sqrt{x}} \qquad y_1=\frac{a_0\sin x}{\sqrt{x}}$$

$b_0\neq 0$

$\forall b_0, b_1 \in R$

فصل ۵ اُم تمام شد :)

«مرور امتحان میانترم»

امتحان مباحث مهمش لذ فصل دوم سه و چهار اصولاً .

- فصل دوم: روش حل معادلات مرتبه ی اول:

- خطی مرتبه ی اول $\quad y' + a(x)y = b(x)$

دو طرف $\times e^{\int a(x)dx} \Rightarrow \left(y e^{\int a(x)dx}\right)' = b(x) e^{\int a(x)dx}$

$y = ?$ ← آنگاه انتگرال می‌گیریم از دو طرف داریم

$$y e^{\int a(x)dx} = \int b(x) e^{\int a(x)dx} + c$$

- غیرخطی * معادلات تفکیک پذیر:

$$p(x) + q(y)y' = 0$$

$$\Rightarrow p(x)dx + q(y)dy = 0 \qquad \left(\frac{dy}{dx} = y'\right)$$

$$\int p(x)dx + \int q(y)dy = C$$

لزومی ندارد همیشه جواب به صورت تابع $y = f(x)$ باشد، معادلات ضمنی هم ممکن است جواب باشند.

* معادلات کامل $\quad p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \text{ شرط} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = p(x,y)$$

ما باید این f را بیابیم. $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = q(x,y)$

f را با انتگرال گیری پیدا می‌کنیم

$$p(x,y)=\int p(x,y)\,dx+u(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\left(\int p(x,y)\,dx\right)}{\partial y}+u'(y)=q(x,y)$$

$u'(y)=? \longrightarrow u=\checkmark \quad f(x,y)=\checkmark$

$\longrightarrow f(x,y)=c$

$M(x) \quad M(y)$ عامل انتگرال. معادلاتی که باید کامل شان کنیم.

$p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0$

1) $M(x)$: $\frac{p_y-q_x}{q}=g(x) \longrightarrow M(x)=e^{\int g(x)dx}=e^{\int g(x)\,dx}$

2) $M(y)$: $\frac{q_x-p_y}{p}=h(y) \longrightarrow M(y)=e^{\int h(y)dy}$

p باید برحسب y باشد

* معادله برنولی:

$y'+a(x)y=b(x)y^{n} \longrightarrow z=y^{1-n}$

پس بین همگن و کامل هست استفاده از آنها بستگی به حالت مساله دارد ... شود مانند عامل انتگرال گرفت.

* قضیه وجود و یکتایی: اگر f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک بازه شامل $\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$ پیوسته باشند معادله

$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

در آن بازه جواب یکتا دارد.

دقت این قضیه بیلمر دارند که تو سؤال بگه آیا طبق قضیه جواب یکتایی هست یکتا یا نه!

$y' = \sqrt[3]{y} \quad y' = y^{\alpha} \quad y(0) = 0$

$\alpha < 0 < 1$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt[3]{y}} = dx \Rightarrow y_2 = ? \end{cases}$$

پس این یا دو جواب درکنیم می‌بینیم جواب یکتا نبود علتش هم شرط پیوستگی نبودن

$\frac{\partial f}{\partial y}$ است پس شرط یکتایی برقرار نیست که برو دنبالش انتگرال بگیر.

پس شرایط برقرار نبود، یکتایی هم برقرار نبود و y_1, y_2 متفاوت شدیم.

(ممکن است شرایط برقرار نباشد ولی جواب یکتا شود ها) پس شرط لازم نیست.

فصل ۳: معادلات خطی مرتبه‌ی دوم:

ضریب ثابت همگن: $y'' + ay' + by = 0$

$\rightarrow (r^2 + ra + b) = 0 \longrightarrow r_1, r_2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 & e^{r_1 t},\ e^{r_2 t} \\ \Delta = 0 & e^{rt},\ te^{rt} \\ \Delta < 0 & e^{\alpha t}\cos\beta t \quad e^{\alpha t}\sin\beta t \end{cases}$$

ضرایب نامعین
ناهمگن *
پارامتر تغییر

$y''+ay'+by=f(t)$ $\varphi(t)=?$

$f(t)$	$\varphi(t)$
e^{rt}	ke^{rt}
حالت خاص همگن جواب مضاعف e^{rt}	kte^{rt}
$P_n(t)$ چندجمله‌ای	$q_n(t)$
همگن $r=0$	$t\cdot q_n(t)$
$\sin\alpha t$ $\cos\alpha t$ همگن اگر $\pm\alpha i$ ریشه بود	$a\sin(\alpha t)+b\cos(\alpha t)$ $t($)

حدس ما برای ضرب و جمع قابل ترکیب است.

$P(t)=f_1(t), f_2(t) \longrightarrow \varphi(t)=\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)$

$+$ $\qquad +$

* پارامتر های متغیر:

$y=u_1y_1+u_2y_2$

جواب مستقل همگن

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

این مشتق دربیار انتگرال‌ها معلومه!

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

این قسمت رو نسبتاً تو دانشگاه هم حل کرده بودیم!

ارزد به نام خدا شروع جلسه ۲۴ آبان

فصل ۳ـ ۱) حل معادله‌ی ضریب ثابت همگن جلسه قبل ✓

۲) « « ناهمگن جلسه قبل ✓

۳) استقلال خطی و رونسکین این جلسه

I) اگر p و q پیوسته باشند معادله‌ی $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ دارای دو جواب مستقل y_1 و y_2 است و هر جواب دیگر $c_1y_1 + c_2y_2 = 0$ است.

II) $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

III) اگر y_1 و y_2 در بازه‌ی I وابسته‌ی خطی باشند آنگاه هر $t \in I$ که داریم

$W(y_1, y_2)(t) = 0$

اگر در یک نقطه‌ی $t_0 \in I$، $W \neq 0$ یعنی y_1 و y_2 در بازه‌ی I مستقل هستند.

IV - اگر شرایط اولیه برقرار باشد

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

$$y_1, y_2 \longrightarrow W(y_1,y_2)(t) = W(y_1,y_2)(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}$$

$W(y_1,y_2)(t) = 0$ یا همه جا صفر است یا

$W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ همه جا مخالف صفر است.

شرط آبل باید برقرار باشد ← خطی بودن معادله

پیوستگی p, q

چه چیز دیگری بود؟

فصل چهارم: فقط تعمیم فصل سه‌ای هستش همه. اثبات دقیقی نداریم.

۱) ضریب ثابت همگن:

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots = 0$$

۲) ناهمگن ← ضرایب نامعین

پارامترهای متغیر: اگر بیش از مرتبه ۲ بود حل نکنید
روش لازم نیست حل کنید فقط توضیح
بدهید که u_1', u_2', u_3'
را به دست میاریم را انتگرال میگیریم.
تنها دو تا مرتبه ۲ را حل کنید

مرتبه ۲ بود حل کنید
بیشتر بود فقط توضیح بدهیم
الگوریتم چیکار میکرد:
۱- $u_1', u_2', \dots, u_n'$ را بدست میاریم
۲- $u_i = \int u_i'$

۱) (ارها، ۹۵)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x+2y}$$

حل؟

این مثال حدیه و روش خصوص به خود داره

$$y'=\frac{2x-y}{x+2y} \Rightarrow y/x=u \Rightarrow y=xu$$

$$\rightarrow y'=xu'+u$$

$$\Rightarrow xu'+u=\frac{2x-xu}{x+2xu} \Rightarrow xu'+u=\frac{2-u}{1+2u}$$

$$\Rightarrow xu'+u+2xuu'+2u^2=2-u$$

$$\Rightarrow u'(x+2xu)=2-2u-2u^2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}x(1+2u)=2-2u-2u^2$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{1+2u}{2-2u-2u^2}du$$

$$\Rightarrow \ln|x|=\int\frac{1+2u}{\underbrace{2-2u-2u^2}_{v}}du \qquad -\tfrac{1}{2}dv$$

$$\ln|x|=-\tfrac{1}{2}\ln|v|+c$$

$$\Rightarrow \ln|x\sqrt{v}|=c \Rightarrow \boxed{|x\sqrt{v}|=k}$$

توجه! جالب اینکه این دیگ یک نفر آدم باهوش فهمیده کاملاً (معادله) ولی خانم تا ترپیو گفته

دیگه چیزی ندیدیم که اینطور شده و لذا این مبحث رو نشنیدیم. ای بابا :)

$$|x\sqrt{u}| = k \longrightarrow x\sqrt{2-2u-2u^2} = k$$

$$\longrightarrow x\sqrt{2-\frac{2y}{x}-\frac{2y^2}{x^2}} = k$$

۴) (۹۵، ۲، ۶) $y'=y^{\alpha} \quad 0<\alpha<2-\{\alpha=1\}$

$y(0)=[\alpha]$ الان بگید چرا یکتا هست چطوره!

$$0<\alpha<1 \quad \begin{cases} y'=y^{\alpha} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad 1<\alpha<2 \quad \begin{cases} y'=y^{\alpha} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

$$f(t,y)=y^{\alpha} \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial y}$$

در هیچ بازه‌ای شامل ۰ پیوسته نیست. پس نمی‌شه از قضیه یکتایی جواب استفاده کرد. ببینیم میشه جوابا پیدا کنیم؟

$y \neq 0 \quad y'=y^{\alpha} \Longrightarrow \frac{dy}{y^{\alpha}} = dt$

جواب اول

$$\Longrightarrow \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = t+c \qquad y(0)=0 \Longrightarrow t=c$$

$$\Rightarrow y^{1-\alpha} = (1-\alpha)(t+c)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow ((1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

جواب دوم $y=0$

حالا وقت کنید که برای α های مختلف دامنه جواب متفاوت است و این را با توضیح

دادکه مستقل به مقدار α این دامنه به حالت $t \in R$ و $t>0$ تقسیم کرد.

$$\alpha=\frac{1}{3} \quad \frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{2/3}=\frac{3}{2} \Rightarrow y_2=\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}=$$

$$\frac{2}{3}+\sqrt{2/3}\,t$$

$t>0$ جواب

$$\alpha=\frac{1}{4} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3/4}=\frac{4}{3} \Rightarrow y_2=\left(\frac{4}{3}t\right)^{3/4}$$

$t \in R$

$$\text{II} \Rightarrow \quad y'=y^{\alpha} \Rightarrow y(0)=1 \quad \Big|_{1}^{0}$$

$$f=y^{\alpha} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\alpha y^{\alpha-1} \qquad 1<\alpha<2$$

پیوسته است در همسایگی $(0,1)$

پیوسته است

پس طبق قضیه وجود و یکتایی

جواب یکتاست.

سوال ۴ (سال ۹۰ ملی)

$$y'=\frac{-t+(t^2+4y)^{1/2}}{2} \qquad y(2)=-1$$

$$\begin{cases} y_1(t) = 1 - t \\ y_2(t) = -t^2/4 \end{cases}$$

نشان دهید طبق قضیه ی یکتایی جواب تناقضی به وجود نیامده ؟

$$-1 = \frac{-t + (t^2+4-4t)^{1/2}}{2} = \frac{-t+|t-2|}{2}$$

$$-2 = -t + |t-2| \Rightarrow |t-2| = t-2 \Rightarrow t \geq 2$$

$$-\frac{t}{2} = \frac{-t+0}{2} \checkmark \quad t \in \mathbb{R}$$

حتی این دوتا جواب هم هستن.

حالا چرا تناقض ندارند؟ زیرا اگر $f(t)$ که همون $\frac{-t+(t^2+4y)^{1/2}}{2}$

باید $\frac{\partial f}{\partial y}$ بگیریم در بازه ای شامل $(2,-1)$ پیوسته نیست.

$$\begin{cases} y' + a(x)\, y = b(x) \\ y' = f(x,y) \end{cases}$$

اگر a و b پیوسته باشند جواب وجود دارد و یکتاست.

اگر f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در بازه ای شامل [illegible] پیوسته باشند جواب یکتاست

* حل معادلات مرتبه‌ی اول :

۲ ـ (بهار ۹۵)

$y''' - 3y' + 2y = 0$

$\hookrightarrow r^3 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \underset{\text{ریشه}}{r = 1}$

$r^3 - 3r + 2 \;|\; r-1 \quad \to \quad r^2 + r - 2$

$= (r-1)(r^2 + r - 2)$

$= (r-1)(r-1)(r+2)$

$= (r-1)^2 (r+2)$

$y_1 = e^t \quad y_2 = te^t \quad y_3 = e^{-2t}$

$\Rightarrow y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-2t}$

برعکس اینم هست :) مثلاً به ما معادله رو نگن، جواب‌هاش رو بگن و بخوان معادله رو بسازیم.

$(r-1)^2 (r+2) = 0 \Rightarrow r^3 - 3r + 2 = 0$

$y''' - 3y' + 2y = 0$

ب) $y''' - 3y' + 2y = 5e^{-2t} + e^t$

یکبار جواب همگن

$P_1(t) = ke^{-2t} \times t$

$P_2(t) = e^t \longrightarrow \varphi_2(t) = he^t t^2$

دوبار جواب همگن

Scanned by CamScanner

$$y' = -2ke^{-2t}t + ke^{-2t}$$

$$y'' = 4ke^{-2t}t - 4ke^{-2t}$$

$$y''' = -8ke^{-2t}t + 4ke^{-2t} + 8ke^{-2t}$$

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$ (۹۵،۶ -۷

پیوسته روی کل R

$$\begin{cases} y_1(t) = e^t \\ y_2(t) = \sin t \end{cases}$$

آیا y_1, y_2 می‌توانند جواب این معادله باشند؟

آیا می‌توانند جواب مستقل باشند؟

بله می‌توانند دیدیم.

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^t & \sin t \\ e^t & \cos t \end{vmatrix} = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$t = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow W(y_1,y_2) = 0$$

این دو نمی‌توانند جواب یک معادله باشند. هستند

چون اگر که p و q پیوسته هستند اگر y_1, y_2

ثابت کنید اگر $y_1 = e^t$ و $y_2 = \sin t$ پاسخ معادله با شرط قضیه آبل باشیم که رونسکین یا صفر است یا یک (زیرا p و q پیوسته اند)

اما دارای پارس بعضی جاها صفر و بعضی جاها غیر صفر است پس y_1 و y_2 همزمان پاسخ معادله نمی توانند باشند.

بنام خدا

فصل ششم تبدیل لاپلاس شروع جلسه ۲ آنلاین

تعریف: اگر $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، تبدیل لاپلاس f را به صورت

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

این f است

این تابع s خواهد بود لزوماً

و اگر s تا ردی فرکانس باشد تبدیل لاپلاس سیگنال را می‌برد به فضای فرکانس.

مثال

$$f(t) = 1$$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\lim_{t\to\infty} e^{-st} - e^0}{-s} = \frac{0 - 1}{-s} = \frac{1}{s}$$

$s > 0$ باید باشد تا این را اینجا صفر بگذاریم.

$$L\{1\} = \frac{1}{s} \qquad s > 0$$

تبدیل شده روی S کار دارد

قضیه: اگر $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ قطعه به قطعه پیوسته باشد و مقادیر ثابت $\alpha > 0$

، $k \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که $|f(t)| < \alpha e^{kt}$ ، $t \geq t_0$

چون داریم می‌خواهیم تابع رشد نمایی کند مثلاً e^{5t} یا e^{t^2}

تابع باید مرتبه نمایی داشته باشد

نه!

آنگاه تبدیل لاپلاس به ازای $s>k$ موجود است.

⚠ در حالت اینکه عکس این قضیه درست نیست. یعنی ممکن است اینکه تبدیل لاپلاس وجود داشته باشد چیزی را در مورد ج. این قضیه نشان دهند که مثلاً $f(t) \cancel{<} \alpha e^{kt}$

این قضیه منطق کلاسیک اگر ۴=k حساب شد، ۴=k هست.

مثال: $f(t)=e^{at} \Rightarrow |e^{at}|<\alpha e^{kt}$

$\alpha>1 \quad k=a \quad , t_0=1$

که برای $t>t_0$ باید برقرار باشد برای $s>a$ تبدیل لاپلاس

معلوم.

⚠ دقت کنید که به جای k کوچکترین عددی که صدق کند بگذارید تا بهترین نتیجه را بگیرید.

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,dt=\int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt$$

$$=\frac{1}{(a-s)}e^{(a-s)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a-s}\left(\lim_{t\to\infty}e^{(a-s)t}-e^{0}\right)$$

$$=\frac{1}{a-s}(0-1)=\frac{1}{s-a}$$

این صفر می‌شود که $s>a$ یا به عبارتی $a-s<0$ بشود.

s مثبت بوده و لیکن الیته s بزرگتر از a است ،
چون این کراندار است پس بنا به تابع نمایی صفر میشه
دنبال این S با a مقایسه نخواهیم شد

مثال ۵ -

$p(t) = \sin at$

$$L\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at \, dt = I$$

$$I = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-st}}_{u} \underbrace{\sin at \, dt}_{dv} =$$

$$\cancel{-\frac{1}{s}e} \qquad = \frac{e^{-st}\cos at}{a}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st}\left(-\frac{\cos at}{a}\right)dt$$

؟ کراندار

$$I = 0 \times \text{کراندار} + 1 \times \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos at \, dt$$

$$I = \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left[e^{-st}\frac{\sin at}{a}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(-se^{-st})\frac{\sin at}{a}dt$$

$$I = \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left[0 - 0 + \frac{s}{a}I\right] \Rightarrow I = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}I$$

$$\Rightarrow I\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a} \rightarrow I = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{s^2+a^2}{a^2}} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

حتما به شما استاد گفته حتما این مراحل کردیم، حتی شرطی را برای s
نیاز نداشتیم چون s بزرگ است ـــــ همه جا تعریف شده

روش دوم محاسبه ی لاپلاس برای $\sin a t$

۳۰ پنج شنبه اردیبهشت ۱۳۹۵

استفاده از اعداد مختلط:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(+\theta) - i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$L\{\sin at\} = \frac{1}{2i} L\{e^{iat} - e^{-ait}\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ai} - \frac{1}{s+ai}\right) = \frac{1}{\cancel{2i}}\left(\frac{\cancel{2ai}}{s^2 - a^2 i^2}\right)$$

$i^2 = -1$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}$$

شبیه این مثال اگر لازم بود از اعداد مختلط استفاده کنید.

اردیبهشت ۱۳۹۵

توجه! تبدیل لاپلاس خاصیت خطی دارد، یعنی

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f\} + bL\{g\}$$

تعریف:

$$f(t) \longrightarrow L\{f(t)\}$$

$$L\{f(t)\} \xrightarrow{L^{-1}} f(t)$$

$f(t)$ را لاپلاس داده و $F(s)$ می گیریم آنگاه

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

به طور معادل بر حسب $f(t)$ = $L^{-1}\{F(s)\}$ نمایش می‌دهیم

مثل : $L\{1\} = \frac{1}{s}$ $L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$

* روش کلی حل معادلات دیفرانسیل با تبدیل لاپلاس :

گام اول : گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله

گام دوم : محاسبه‌ی تبدیل لاپلاس حاصل از معادله بدست آمده

در گام ۲

گام سوم : محاسبه‌ی خود جواب با گرفتن تبدیل وارون

حالا در گام ۱ می‌خواهیم هم که بیش بیاید که تبدیل لاپلاس مشتق چی میتونه باشد

* تبدیل لاپلاس مشتق

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{f'(t)}_{dv} \underbrace{e^{-st}}_{u} dt$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-se^{-st}) f(t)\,dt$$

$$= \lim_{t \to \infty} f(t)e^{-st} - f(0)e^{0} + s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

* به شرط اینکه $\lim_{t \to \infty} f(t)$ کراندار باشد.

$$L\{f'(t)\} = 0 - f(0) + sL\{f(t)\}$$

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$$

مثال:

$$y' + y = 1 \qquad y(0) = 0$$

شرط اولیه

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$

$$L\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

$$L\{y + y'\} = L\{y\} + L\{y'\} = L\{1\}$$

$$\longrightarrow Y + sY = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\longrightarrow y(t) = L^{-1}(Y(s))$$

$$\longrightarrow y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$= 1 - e^{-t}$$

[illegible]

* تعمیم فرمول مشتق : با استفاده متوالی از رابطه ی لاپلاس f' نتیجه می شود که

تبدیل لاپلاس مشتق n ام برابر است با :

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

حالا مثلا بیایم برای $n=2$ ببینیم چه می شود:

$L\{f''(t)\}$

$g(t) \overset{\text{فرض}}{=} f'(t) \to L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0)$

$= sL\{f'(t)\} - g(0) = sL\{f'(t)\} - f'(0)$

$= s(sL\{f(t)\} - f(0)) - f'(0)$

$= s^2 L\{f\} - sf_0 - f'(0)$

به نام خدا

۶ ـ آذر

« تبدیل لاپلاس ـ مرور » شروع جلسه

۱) تعریف : $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$

۲) شهوداً اگر نمودار تابعی دارای تکه‌های پیوسته باشد آن تابع تبدیل لاپلاس دارد.

یعنی بی‌نهایت دارا نباشد.

توضیح: اگر f از مرتبه‌ی نمایی باشد یعنی $\forall t \geq t_0 \quad f(t) < a e^{kt}$

آنگاه تبدیل لاپلاس آن به ازای $s > k$ وجود دارد.

۳) تبدیل لاپلاس مشتق : $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$

$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

شرط: توابع f، f' و ... و $f^{(n-1)}$ تبدیل لاپلاس داشته باشند.

مثال ۱ : $y'' - y' - 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \,,\, y'(0) = 0$

$L\{y\} = Y(s)$ فرض کنید
می‌دانیم

$L\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$

$L\{y''\} = s^2 Y(s) - s \times 1 - 0$

$L\{0\} = 0$

$\Rightarrow L\{y'' - y' - 2y\} = 0 \Rightarrow s^2 y - s - sy + 1 - 2y = 0$

$y(s)\,(s^2 - s - 2) = s - 1 \Rightarrow y(s) = \dfrac{s-1}{s^2 - s - 2}$

حالا لاپلاس وارون چجوری بگیریم این رو؟

ما می‌دانیم که $L\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ می‌خواهیم این گونه کرد

عبارت تفکیک کنیم تا درست بشه. که همه لاپلاس وارون گرفته

تفکیک کنیم

$$y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$\Rightarrow A(s+1) + B(s-2) = s - 1$

$\Rightarrow A + B = 1 \quad A - 2B = -1 \Rightarrow B = \frac{2}{3} \quad A = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+1} \longrightarrow y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$$

$$= \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-2t}$$

مثال ۲: خوب با لاپلاس ~~...~~ استدلال انجام بدیم $L\{\cos at\} = ?$

حل:

$f(t) = \sin(at)$

$g(t) = \cos(at) \longrightarrow g(t) = \dfrac{1}{a} f'(t)$

$$L\{g(t)\} = \frac{1}{a} L\{f'(t)\} = \frac{1}{a}\left(sL\{f(t)\} - f(0)\right)$$

$$= \quad f(0) = 0 \qquad = \frac{s}{a} L\{f(t)\} - \frac{s}{a} \cancel{f(0)}$$

$$= \frac{s}{a} L\{f(t)\} = \frac{s}{a} \times \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

نکات مهم: رفتار حدی تبدیل لاپلاس:

۱ـ اگر f تبدیل لاپلاس داشته باشد، آنگاه داریم

$$\lim_{t \to +\infty} L\{f(t)\} = 0 \qquad \text{مثال} \quad L\{f(t)\} = \frac{s^2}{s^2+1} \; \times$$

۲ـ اگر لاپلاس f' موجود باشد داریم

$$\lim_{s \to \infty} L\{f'\} = 0 \Rightarrow \lim_{s \to \infty} sF(s) - f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0)$$

۳ـ قضیه مقدار نهایی را بدون اثبات م: $\lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{t \to \infty} f(t)$

$\frac{1}{s-a}$ ما نیاز داریم تبدیل لاپلاس توابع بیشتری رو بدونیم تا [illegible]

$$\frac{a}{s^2+a^2} \quad , \quad \frac{b}{s^2+a^2}$$

* یک سری نکات مهم تبدیل لاپلاس:

تبدیل لاپلاس چندجمله‌ای که پیدا کنیم:

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty \underbrace{t^n}_{u}\, \underbrace{e^{-st}\,dt}_{dv}$$

$$= \frac{t^n e^{-st}}{-s}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty n t^{n-1} \frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^n * e^{-st}}{-s} + 0 + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st}\,dt$$

$$= 0 + 0 + \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\}$$

$$L\{t^n\} = \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\}$$

[illegible] $\quad L\{1\} = \frac{1}{s} \qquad L\{t\} = L\{1\}\frac{1}{s}$

$$= \frac{1}{s^2}$$

$L\{t^2\} = L\{t\}\frac{2}{3} = \frac{2}{s^3}$ یا $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

مثال ۲:

$L\{e^{at} f(t) \, dt\} = ?$

$= \int_0^\infty e^{at} f(t) \, e^{-st} dt$ تبدیل لاپلاس f

$= \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-ut} dt$

$= F(u) = F(s-a)$:

مثال:

$f(t) = \sin(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$L\{e^{2t}\sin t\} = F(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2+1} = \frac{1}{s^2-4s+5}$

$(a=2t)$

$\text{If } 1 \leq \alpha e^{kt} \rightarrow s > k$ با رنگ قرمز

$\text{If } e^{at} \, \& \, do^{(k+a)t} \longrightarrow s > k+a$

مثال:

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4s+5}\right\} = ?$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)^2+1}\right\} = ? \quad \left(L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)\right)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \frac{2}{(s-2)^2+1}\right)$$

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad F_2(s) = \frac{1}{s^2+1}$$ حل

$$\longrightarrow L^{-1}\{F_1(s-2) + 2F_2(s-2)\}$$

$$= e^{2t}\left(f_1(t) + 2 f_2(t)\right) =$$

$$e^{2t}\left(\cos t + 2\sin t\right)$$

۳ـ

$$L\{t f(t)\} = ?$$

$$L\{t f(t)\} = \int_0^\infty t f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)(t e^{-st}) dt$$

$$= -\frac{d}{ds}\Big(\underbrace{\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt}_{L\{f(t)\}} \quad \frac{-d(e^{-st})}{ds}$$

$$'' \; -F'(s)$$

۱۱ سه شنبه
خرداد ۱۳۹۵

Tuesday
May 31 2016

مثال:

$L\{te^t\} = ?$

$f(t) = e^t$

$F(s) = \frac{1}{s-1}$

راه اول: $L\{te^t\} = -F'(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$

راه دوم: $g(t) = t \quad L\{e^t g(t)\} = G(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2}$

$G(s) = \frac{1}{s^2}$

-۴ $L\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt$

$= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-ut} du\right) f(t) dt$

$\frac{e^{-st}}{t} = \int_s^\infty e^{-ut} du = \frac{e^{-ut}}{-t} \Big|_s^\infty =$

$\lim_{u \to \infty} \frac{e^{-ut}}{-t} - \frac{e^{-st}}{-t} = 0 + \frac{e^{-st}}{t} = \frac{e^{-st}}{t}$

What just happened???

$$\int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-ut} du \right) f(t) dt$$

$$= \int_s^\infty \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt \right)}_{F(u)} du = \int_s^\infty F(u) du$$

منم فهمیدم چی شد! انشالا همیشه بفهمم (:

۵ـ

$$L\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} =$$

از جز به جز استفاده کن

$$\int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)}_{u} \underbrace{e^{-st} dt}_{dv} =$$

$$= \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) \left(\frac{e^{-st}}{-s} \right) \Bigg]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$= \int_0^\infty f(\tau) d\tau \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-st}}{-s} - 0 + \frac{1}{s} L\{f(t)\}$$

اگر همگرا باشد

با فرض کرانداری $\int_0^\infty f(\tau) d\tau$ داریم:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

مثال: $L^{-1}\left\{\ln \frac{s^2+1}{s^2+s}\right\}$

ln رو حذف چیکارش کنیم؟

پس چون مشتقش خوبه میریم باهاش کار می‌کنیم

$$F(s) = \ln(s^2+1) - \ln(s^2+s) = \ln(s^2+1) - \ln(s) - \ln(s+1)$$

$f(t) = ?$

$$F'(s) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$L^{-1}\{F'(s)\} = 2\cos t - 1 - e^{-t} = -t f(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{e^{-t} + 1 - 2\cos t}{t}$$

به نام خدا شروع جلسه‌ی ۱۳ آذر

تبدیل لاپلاس مرور

(۱) $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s)$

(۲) الگوریتم حل معادله I) گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین معادله

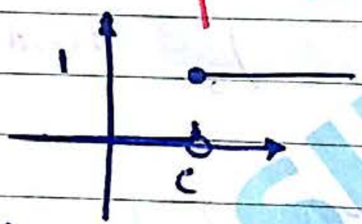
II) تعیین تبدیل لاپلاس جواب

III) تبدیل لاپلاس وارون و محاسبه‌ی جواب معادله

برای لاپلاس گرفتن از توابع چندضابطه‌ای از این‌ها کمک بگیریم

* تبدیل لاپلاس چند تابع دیگر:

۱: تابع پله:



$f(t) = u_c(t)$

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$ تابع پله

$g(t) = u_c(t)\, f(t-c)$

1) $L\{u_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\,dt$ تبدیل لاپلاس

خود تابع پله

$$= \int_c^\infty e^{-st} \times 1 \times dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_c^\infty = \frac{0 - e^{-sc}}{-s} = \boxed{\frac{e^{-cs}}{s}}$$

$$2)\ L\{u_c(t) f(t-c)\} =$$ شبیه بالایی باید x تا ج کار

$$\int_0^\infty e^{-st} u_c(t) f(t-c)\, dt = \int_c^\infty e^{-st} \underbrace{f(t-c)}_{u}\, dt$$

آ c که گذاشتیم صفر میشه از c تا ∞

تغییر متغیر در همین جا : t-c را گرفته بودیم

$$t-c=u \longrightarrow t = c+u$$

$$0 < u < \infty \qquad dt = du$$

$$\int_0^\infty e^{-s(u+c)} f(u)\, du = e^{-sc} \overbrace{\int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du}^{L\{f\}}$$

$$\Rightarrow L\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-cs} L\{f(t)\}$$

مثال :
$$y'' + 4y = g(t) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

$$g(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

حالا g رو باید جوری به صورت پله x تابع‌ها در کنیم.

Scanned by CamScanner

۱- نوشتن g(t) با نرم تابع پله

۲۷ پنج شنبه
آبان ۱۳۹۵
Thursday
November 17 2016
صفر

$$g(t) = \underbrace{g_1(t) + u_1(t)\, g_2(t)}$$

حالا مشخصاً چنین چیزی داریم

$$u_1(t) \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$

$$0 \leq t < 1 : g(t) = 1 \Rightarrow g_1(t) + 0 \times g_2(t) = t$$

$$t \geq 1 : g(t) = 1 = g_1(t) + 1 \times g_2(t) \qquad g_2(t) = 1 - g_1(t) = 1 - t$$

$$g = t + u_1(t) \times (1 - t)$$ می‌توان این تابع را به فرم پله دستگی نوشت

۲) گرفتن تبدیل لاپلاس:

$$L\{y''\} = s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$$

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

۲۸ جمعه
آبان ۱۳۹۵
Friday
November 18 2016
۱۸ صفر ۱۴۳۸

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$L\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-cs} L\{f(t)\}$$ عبارت

$$y'' + y = g(t) \Rightarrow L\{y''\} + 4L\{y\} = L\{g(t)\}$$

$$L\{y\} = Y(s)$$

$$L\{y''\} = s^2 Y(s) - 0 - 0 = s^2 Y(s)$$

$$L\{g(t)\} = L\{t + u_1(t)(1-t)\}$$

$$= L\{t\} + L\{u_1(t)\,(1-t)\} =$$

$$\frac{1}{s^2} + L\{u_1(t)(1-t)\} =$$

$$f(t-1)$$

$$c=1 \quad f(t-1) = 1-t \Rightarrow f(t) = -t$$

$$L\{u_1(t)\, 1-t\} = e^{-s} L\{-t\} = e^{-s} \times \frac{-1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}$$

عبارت * رو بیار لازمت میشه!

(*) →

$$s^2 y(s) + 4y(s) = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s})$$

$$\rightarrow y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} \times (1-e^{-s})$$

رو تبدیل لاپلاس

حالا از این گرفتی :/ چجوری تبدیل لاپلاس بگیریم؟

آهان باید تکنیک تفکیک کنیم! :)

ضرب شده را با تابع پله هندل می‌کنم e^{-cs}

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} \; ; \; Y(s) = H(s) - e^{-s} H(s)$$

$$L^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

$$y(t) = h(t) - u_1(t)\, h(t-1)$$

می‌ریم سراغ $H(s)$

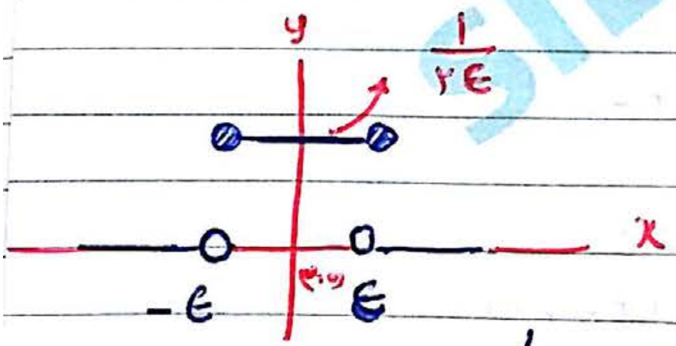
$$H(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4}\right)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{4} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{4} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4} t - \frac{1}{8} L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{4} t - \frac{1}{8} \sin 2t$$

$a = 2$

۲- تابع ضربه



$$d_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon < t < \epsilon \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

و.غ

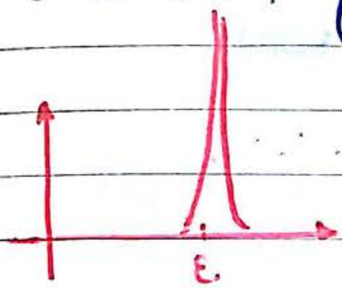
این تابع ضربه اگر $\epsilon \to 0$ حالت حدی هیچ تابعی نیست ولی اونو
همونطوری تعریفش میکنه ما.

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon \le t \le \epsilon \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$\epsilon \to 0$

$$\delta_\epsilon(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & t_0-\epsilon \le t \le t_0+\epsilon \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$\epsilon \to 0$



این تابع شکل ترشحش عصبیه

مساحت زیر نمودارش ثابته $\epsilon \to 0$ خوردتر میشه!

$$L\{\delta_\epsilon(t-t_0)\} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^\infty e^{-st}\,\delta_\epsilon(t-t_0)\,dt$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \frac{e^{-st}}{2\epsilon}\,dt$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \left.\frac{e^{-st}}{2\epsilon(-s)}\right|_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-s(t_0-\epsilon)} - e^{-s(t_0+\epsilon)}}{2\epsilon s}$$

$$= e^{-st_0} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{s\epsilon} - e^{-s\epsilon}}{2s\epsilon}$$ $\sinh(s\epsilon)$

حالا این حد رو یعنی چی؟ هوپیتال زدند مثلاً یا تیلور را.

$$= e^{-st}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sinh(s\epsilon)}{s\epsilon} = e^{-st}\lim_{u\to 0}\frac{\sinh(u)}{u}$$

$$\overset{HOP}{=} e^{-st_0}\lim_{u\to 0}\frac{\cosh(u)}{1} = e^{-st_0}$$

پس نتیجه میگیریم که : $L\{\delta_\epsilon(t-t_0)\} = e^{-st_0}$

۳- انتگرال پیچش (کانولوشن) ـــ به اثبات سروکاری نداریم.

۵۵ میان ۸۷

$$f*g = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau \to$$

انتگرال پیچشی

$$\to L\{f*g\} = F(s)\,G(s)$$

ببین!

مثال- $y''+y=t^3 \quad y(0)=y'(0)=0$

$L\{y\} = Y(s)$

$L\{y''\} = s^2Y(s)$

$L\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$

$$\left.\right\} (s^2+1)Y(s) = \frac{6}{s^4}$$

$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

بنداز تو تکلیفش همین یکم دشولده یا بدبستم .
زنان جای شکل دوباره

س دوم :

$$y(s)=\frac{6}{s^4(s^2+1)}$$

$$y(s)=\underbrace{\frac{1}{s^2}}_{F(s)}\;\underbrace{\frac{6}{s^2(s^2+1)}}_{G(s)}$$

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t \qquad g(t)=L^{-1}\left\{\frac{6}{s^2(s^2+1)}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{6}{s^2}-\frac{6}{s^2+1}\right\}$$

$$6t-6\,L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$=6t-6\sin t$$

$$y(t)=f*g=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_0^t (t-\tau)(6\tau-6\sin\tau)\,d\tau=$$

$$6t\int_0^t \tau - \sin\tau \, d\tau - 6\int_0^t \tau^2 - \tau\sin\tau \, d\tau$$

$$= \quad I_1 = \int_0^t \tau \, d\tau = \frac{t^2}{2}$$

$$I_2 = \int_0^t \sin\tau \, d\tau = -\cos\tau \Big|_0^t = 1 - \cos t$$

$$I_3 = \int_0^t \tau^2 \, d\tau = \frac{t^3}{3}$$

$$I_4 = \int_0^t \underbrace{\tau}_{u} \underbrace{\sin\tau \, d\tau}_{dv} = \tau(-\cos\tau)\Big|_0^t - \int_0^t (-\cos\tau)\, d\tau$$

$$= -t\cos t + 0 + \sin t - 0$$

$$y(t) = 6t(I_1 - I_2) - 6I_3 + 6I_4$$

حل $I_1 = \int_0^t \tau \, d\tau = \frac{t^2}{2}$.

$$I_2 = \int_0^t \sin\tau \, d\tau = -\cos\tau \Big|_0^t = 1 - \cos t$$

$$I_3 = \int_0^t \tau^2 \, d\tau = \frac{t^3}{3}$$

$$I_4 = \int_0^t \underbrace{\tau}_{u} \underbrace{\sin\tau \, d\tau}_{dv} = \tau(-\cos\tau)\Big|_0^t - \int_0^t (-\cos\tau)\, d\tau$$

$$= -t\cos t + 0 + \sin t - 0$$

$$y(t) = 6t(I_1 - I_2) - 6I_3 + 6I_4$$

فصل ۷ به نام خدا شروع جلسه ی ۱۵ آذر ماه ۹۵

«دستگاه های خطی»

هدف حل دستگاه معادلات $X' = AX$ است که در آن $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

تابعی برداری و ~~تابع برداری است~~ A یک ماتریس $n \times n$

$$X=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad A=[a_{ij}]_{n\times n}$$ است.

$$X'=AX \rightarrow \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

مثال: مدلسازی واکنش شیمیایی و مدار و . . .)

مثال:

$$x' = x - y$$
$$y' = x + y$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}$$

$X'=AX$ ← دستگاه خطی مرتبه اول و ضریب ثابت.

به نام خدا * مفاهیم اولیه از جبر خطی

۱) ضرب ماتریس در بردار

$$B = AX = [b_i]_{n\times 1}$$

$$b_i = (a_{i1} \cdots a_{in}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} = (a_1 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = AX$$

$$X \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

اثبات: $b_i = x_1(a_1)_i + x_2(a_2)_i + \cdots + x_n(a_n)_i$

$$= x_1a_{i1} + x_2a_{i2} + \cdots + x_na_{in}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

روش ضرب عادی:

$$B = AX \begin{bmatrix} (1\ 1\ 0)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ -1\times 1 + 2\times -1 \\ 0\times 1 + 0\times 3 + -1\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B = AX = 1\times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 1\times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۱) استقلال خطی بردارها:

* اگر بشود دید که

$$c_1x_1+\dots+c_nx_n=0$$

برای بردارهای $x_i\in\mathbb{R}^n$ بتوان نتیجه گرفت که $c_1=\dots=c_n=0$

، می‌گوییم $x_1,\dots,x_n$ مستقل خطی هستند.

مثال:

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad x_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad x_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$x_3=x_1+2x_2 \longrightarrow x_1+2x_2-x_3=0$$

$c_1=1\quad c_2=2\quad c_3=-1$

به خاطر وجود c_iهای ناصفر نتیجه می‌شود که X_1، X_2 و X_3 مستقل نیستند.

* توجه: اگر ستون‌های ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ مستقل باشند آنگاه A وارون‌پذیر است.

همچنین اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه ستون‌های آن مستقل هستند.

داریم: $A=(a_1\ \dots\ a_n)$ $\quad c_1a_1+\dots+c_na_n=0$

ستون‌های A $\quad c_i\neq0$?

اگر $c_i\neq0$ داشته باشیم

$$Ax=x_1a_1+\dots+x_na_n$$

پس مستقل نیستند و وارون‌پذیر هم نیستند.

$$(a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0 \quad AC = 0$$

c

* نتیجه: برای بررسی استقلال خطی ستون‌های یک ماتریس کافیست بررسی کنیم که

بردار ناصفر c وجود دارد که $AC = 0$ باشد؟

* برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دترمینان برابر با $\det(A) = ad - bc$

درست می‌شود.

* اگر $\det(A) \neq 0$ ماتریس A وارون پذیر است داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۳. تابع $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ را یک تابع ماتریسی می‌گوییم داریم

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

$$A'(t) = \begin{bmatrix} a_{11}'(t) & \cdots & a_{1n}'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}'(t) & \cdots & a_{mn}'(t) \end{bmatrix}$$

$X \neq 0$

لااقل یک درایه خلاف صفر باشد

۴_ مقدار ویژه و بردار ویژه: اگر برای بردار X و مقدار λ داشته باشیم $AX = \lambda X$: آنگاه λ را مقدار ویژه و X را بردار ویژه ی A می گوییم.

نحوه ی محاسبه: $AX = \lambda X \Rightarrow$

$(A - \lambda I) X = 0$ ← $A - \lambda I$ وارون ناپذیر

$\neq 0$

$AC = 0$; $\det(A - \lambda I) = 0$

چندجمله ای درجه ی n ← چندجمله ای ویژه

λ: ریشه های چندجمله ای ویژه ← $P(\lambda) = 0$

λ معلوم ← $AX = \lambda X$ ← $X = ?$

توضیح: ماتریس $A - \lambda I$ وارون ناپذیر است زیرا بردار X را یافتیم که ناصفر بود (اما) $(A - \lambda I)$ در آن ضرب شد و صفر شد. حال اینکه $\det(A - \lambda I)$ صفر شده است، چون که λ متغیر ماست در این جا یک چندجمله ای درجه n می سازد.

پس λ محاسبه می شود حال که A و λ را داریم از $AX = \lambda X$، X را می توان پیدا کرد.

(البته X یکتا نیست).

... ماتریس زیر دا...
...ل بالرس
... مقدار ویژه ی λ اگه آن ها را در سمت
توجه: به ازای هر مقدار ویژه ی λ اگه آن ها را در سمت...

پنجشنبه ۱۱ آذر ۱۳۹۵
Thursday December 1 2016

در فضای $(A-\lambda I)$ می‌بریم) بی‌نهایت
بردار ویژه موجود است زیرا اگر X بردار ویژه باشد داریم:

$$AX=\lambda X \Rightarrow A(\alpha X)=\alpha AX=\alpha\lambda X=\lambda(\alpha X)$$

$$A(\alpha X)=\lambda(\alpha X)$$

بردار ویژه

مثال: مقادیر ویژه‌ها این را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$① \det(A-\lambda I)=0 \qquad \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 3\\ 1 & -1-\lambda\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)-3=0$$

جمعه ۱۲ آذر ۱۳۹۵
Friday December 2 2016

$$\lambda^2-1-3=0 \Rightarrow \lambda_1=2 \quad \lambda_2=-2$$

$$\lambda_1=2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\overbrace{x_1+3x_2=2x_1}^{x_1=3x_2}$$

$$\underbrace{x_1-x_2=2x_2}_{x_1=3x_2}$$

همیشه هر دو معادله باید یک نتیجه بدهند و گرنه اشتباه شده یعنی اشتباه کرده‌اید. حال دو مجهول داریم و تنها یک معادله داریم.

$$X_1=\begin{bmatrix}3\alpha\\ \alpha\end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -2 \qquad AX_2 = -2X_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ -2x_4 \end{bmatrix}$$

$x_3 + 3x_4 = -2x_3 \Rightarrow x_4 = -x_3$

$x_3 - x_4 = -2x_4 \Rightarrow x_4 = -x_3$

$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} \beta \\ -\beta \end{bmatrix}$

* حل دستگاه $X' = AX$

حدس جواب $X(t) = \begin{bmatrix} v_1 e^{rt} \\ v_2 e^{rt} \\ \vdots \\ v_n e^{rt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} e^{rt} = v e^{rt}$

حدس طبق معمول حدسی را می‌زنیم و اثبات نحوه رسیدن را ندادیم.

$X(t) = e^{rt} V$

$X' = AX$

$(e^{rt} V)' = r e^{rt} V$

$AX = A e^{rt} V = e^{rt} A V$

$\Rightarrow r e^{rt} V = e^{rt} A V \longrightarrow AV = rV$

اگر $X(t) = e^{rt} V$ جواب دستگاه $X' = AX$ باشد،

لازم است r مقدار ویژه A و V بردار ویژه متناظر با آن باشد.

۱۴ یک شنبه

۱۳۹۵ آذر

Sunday
December 4 2016
۴ ربیع الأول ۱۴۳۸

مثال: $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $\quad X'=AX$

$\lambda_1=2 \qquad X_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \Rightarrow X_1(t)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{2t}$

$\lambda_2=-2 \qquad X_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow X_2(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}$

این دو جواب خطی مستقل هستند و هر جواب دیگر ترکیب خطی اینهاست

$X(t)=c_1X_1(t)+c_2X_2(t)$

Subject: ۱۲۰

Year: Month: Date:

مثال) مسئله:

$r=2$ $\quad x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$

گام ۱) $P(x) = 0 \longrightarrow x=0 \longrightarrow$ نقطه تکین

$q_0 = \lim x \dfrac{x}{x^2} = 1$

$\longrightarrow$ نقطه تکین منظم

$r_0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \dfrac{x^2-4}{x^2} = -4$

گام ۲) $r^2 + (q_0-1)r + r_0 = 0 \longrightarrow r^2 + (1-1)r - 4 = 0 \longrightarrow \boxed{r_1 = 2}, \boxed{r_2 = -2}$

تفاضل این دو به صورت عدد صحیح باشد

$y_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \longrightarrow \begin{cases} y_1' = \sum\limits_{n=0} (n+2)\, a_n\, x^{n+1} \\ y_1'' = \sum\limits_{n=0} (n+2)(n+1)\, a_n\, x^{n} \end{cases}$

جایگذاری

$\sum\limits_{n=0} (n+2)(n+1)\, a_n x^{n+2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)\, a_n\, x^{n+2}$

$+ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+4} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} 4a_n\, x^{n+2} = 0$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\, x^{n+2}$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \quad + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \quad + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \quad - \sum\limits_{n=2}^{\infty}$

① $n=0$, $n=1$ $\quad = 0$

② $n=0: \; 2a_0 x^2 + 2a_0 x^2 - 4a_0 x^2 = 0$ ✓

$n=1: \; 6a_1 x^3 + 3a_1 x^3 - 4a_1 x^3 = 0$ ✓ $\longrightarrow \boxed{a_1 = 0}$

مستقل‌اند ← x^{n+2}

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_n + (n+2)a_n + a_{n-2} + 4a_n\right]x^{n+2} = 0$$

$$\rightarrow (n^2+4n\cancel{+2})a_n + a_{n-2} = 0 \rightarrow \frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{-1}{n^2+4n\cancel{+}} = \frac{-1}{n(n+4)}$$

I) $n=2k+1$ $\quad a_1=0 \quad n=3 \rightarrow 21a_3 + a_1 = 0 \rightarrow a_3=0$

→ تمام اندیس‌های فرد صفری باشد

II) $n=2k \rightarrow \frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = \frac{-1}{2k(2k+4)} \rightarrow$ برای پیدا کردن رابطه

$\frac{a_2}{a_0} = \frac{-1}{2\times 6}$ $\quad k=1$

$\frac{a_4}{a_2} = \frac{-1}{4\times 8}$ $\quad k=2$

⋮

$\frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = \frac{-1}{2k(2k+4)}$ $\quad k=k$

$\times \xrightarrow{\text{ضرب}} \frac{a_{2k}}{a_0} = \frac{(-1)^k}{(2\times\dots\times 2k)\times(6\times 8\times\dots\times(2k+4))}$ ↳ ①

نکته) $2\times 4\times\dots\times 2m = 2^m\times(1\times 2\times\dots\times m) = 2^m\times m!$

$\frac{a_{2k}}{a_0} = \frac{(-1)^k}{2^k k! \;(?)}$ $\quad (?) \rightarrow 6\times\dots\times(2k+4) = \frac{2\times 4\times\dots\times(2k+4)}{2\times 4}$

$\rightarrow \frac{2\times\dots\times(2m)\big|_{m=k+2}}{8} \rightarrow ? = \frac{2^{k+2}\,(k+2)!}{8}$

$\rightarrow ? \rightarrow \frac{a_{2k}}{a_0} = \frac{(-1)^k}{2^k k!\;\frac{2^{(k+2)}(k+2)!}{8}}$

$$\boxed{a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}\,k!\,(k+2)!}\,a_0}$$

رو سیل زیاد کار کن!

Subject: ۱۲۲
Year: Month: Date:

نکته) در مرتبه بسل ← فقط در حالت $\frac{\text{عدد فرد}}{2}$
فقط مقادیر زوج را وارد می‌کنیم

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k-1} k! (k+2)!} a_0 x^{2k+2}$$

فرم جواب دوم

$$y_2 = \alpha y_1 \operatorname{Ln}|x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2}$$

← اگر نقطه عادی داشته باشیم ← (جواب سری حول یک نقطه مشخص که آن نقطه نقطه تکین نباشد)

$$\sum a_n x^n \quad \left(\sum a_n (x-x_0)^n\right)$$

عادی

$y'' + y = 0 \longrightarrow$ جواب سری حول $x_0=0$ پیدا کنید

مثال) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$

یک جواب سری برای اینکه معادله حول نقطه تکین منظم را حول یکی از نقاط تکین پیدا کنید!

توجه
نکته: در معادلات بسل از مرتبه $\frac{2k+1}{2}$ هر دو جواب از فرم سری هستند (با وجود اینکه داریم $r_1 = \frac{2k+1}{2}$, $r_2 = -\frac{(2k+1)}{2}$, $r_2 - r_1 \in \mathbb{N}$)

ولی در حالات دیگر فقط می‌توانیم یک جواب را بدست بیاوریم

$$\begin{cases} y_1 = \sum a_n x^{n+r_1} & — a_n \checkmark \\ y_2 = \sum b_n x^{n+r_2} & — b_n \checkmark \end{cases}$$

یکم ناز

YEKTA

Subject: ۱۲۳
Year: Month: Date:

لاپلاس:

معادله دیفرانسیل با تبدیل لاپلاس

$\downarrow L$ $F(S, Y_{(s)}) = 0 \xrightarrow{} Y_{(s)} = ?$ باید $Y_{(s)}$ را بدست بیاوریم

سپس

$\xrightarrow{L^{-1}} y_{(t)} = ? \longrightarrow$ با لاپلاس وارون گرفتن جواب ما بدست می‌شود

← تبدیل لاپلاس گرفتن فرم دیفرانسیل را به فرم غیر دیفرانسیلی تبدیل می‌کند

← و آن را به معادله عادی تبدیل می‌کند

مثال)

$$\varphi'_{(t)} + \int_0^t (t-\tau)\,\varphi_{(\tau)}\,d\tau = t$$

$\varphi_{(0)} = 0$

واضح است که باید از تبدیل لاپلاس استفاده کنیم

$$\begin{cases} L\{y'\} = S\,L\{y_{(t)}\} - y_{(0)} \\ L\{f * g\} = F_{(s)}\,G_{(s)} \\ L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}} \end{cases}$$

برای لاپلاس وارون

داده‌ها

$$\begin{cases} L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2} \\ L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \\ L\{e^{at} f_{(t)}\} = F_{(s-a)} \end{cases}$$

شرط اولیه

$$L\{\varphi'_{(t)}\} = S\,L\{\varphi_{(t)}\} - \varphi_{(0)}$$

$$L\{t * \varphi_{(t)}\} = \frac{1}{s^2}\,\Phi_{(s)}$$

$$L\{t\}_{n=1} = \frac{1}{s^2}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{L} S\,\Phi_{(s)} + \frac{1}{s^2}\,\Phi_{(s)} = \frac{1}{s^2}$$

Subject: ۱۳۴

Year: Month: Date:

$$\left(S+\frac{1}{S^2}\right)\mathcal{Q}_{(s)}=\frac{1}{S^2}$$

$$\Phi_{(s)}=\frac{1}{S^3+1}\longrightarrow (S+1)(S^2-S+1)=\frac{A}{S+1}+\frac{BS+C}{S^2-S+1}$$

$$1=(A+B)S^2+(B+C-A)S+A+C$$

$$\begin{cases}A+C=1 \\ B+C-A=0 \longrightarrow 2B+C=0 \longrightarrow C=-2B \\ A+B=0 \longrightarrow A=-B\end{cases}$$

$$\longrightarrow B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3},\ A=\frac{1}{3}$$

$$\Phi_{(s)}=\frac{\frac{1}{3}}{S+1}+\frac{-\frac{1}{3}S+\frac{2}{3}}{S^2-S+1}$$

حال لاپلاس وارون می‌گیریم:

بهترین کار اینکه که تجزیه کنیم اینجا ... مربع کامل کنیم

$$L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}S+\frac{2}{3}}{S^2-S+1}\right\}$$

$$L\left\{\begin{matrix}\sin at \\ \cos at\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\frac{a}{S^2+a^2} \\ \frac{S}{S^2+a^2}\end{matrix}$$

$$L\{e^{at}f_{(t)}\}=F_{(s-a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{3}S+\frac{2}{3}}{S^2-S+1}=\frac{-\frac{1}{3}S+\frac{2}{3}}{(S-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$\frac{-\frac{1}{3}(S-\frac{1}{2})+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{(S-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=-\frac{1}{3}\overset{(1)}{\frac{S-\frac{1}{2}}{(S-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}+\frac{1}{2}\overset{(2)}{\frac{1}{(S-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}$$

(1): $\frac{S-\frac{1}{2}}{(S-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\longrightarrow\frac{S}{S^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\xrightarrow{L^{-1}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$

YEKTA

(2): $\frac{1}{(S-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\longrightarrow\frac{1}{S^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$\longrightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Subject: ۱۲۵

Year: Month: Date:

تکلیف انحرافی: از صورت سوال مشتق می‌گیریم

$$x'' + \left(\int_0^t x(\tau)\, t\, d\tau\right)' - \left(\int_0^t \tau\, x(\tau)\, d\tau\right)'$$

$$\rightarrow x'' + \cancel{t\,x(t)} - \cancel{t\,x(t)} = 1 \longrightarrow x'' = 1 \xrightarrow{\text{در صورتی که اینگونه نمی‌باشد}}$$

نتیجه ← وقتی معادله را به شما می‌دهند که شامل مشتق و انتگرال و... می‌باشد ← نمی‌توانیم مشتق بگیریم ← چون ← به نتیجه‌های اشتباه می‌رسیم.

مثال:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad X'=AX$

۱۴ یک شنبه
آذر ۱۳۹۵

$\lambda_1=2 \qquad X_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1(t)=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

$\lambda_2=-2 \qquad X_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t}$

این دو جواب مستقل خطی هستند و جواب کلی ترکیب خطی هم‌ناست

$X(t)=c_1X_1(t)+c_2X_2(t)$

به نام خدا: دستگاه معادلات، فصل هفتم ۲۲ آبان

$X'=AX \qquad \begin{aligned} x_1'&=2x_1+x_2 \\ x_2'&=3x_1-2x_2 \end{aligned} \longrightarrow X'=\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}}_{A}X$

$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

* حل دستگاه $X'=AX$ (حل دستگاه همگن)

$X'=AX$ (مرتبه ۱)

$X'=re^{rt}v \qquad AX=e^{rt}Av$

$\frac{d}{dt}$

$r\cancel{e^{rt}}v=\cancel{e^{rt}}Av \Rightarrow Av=rv$

r مقدار ویژه

v بردار ویژه

به ازای مقدار و بردار ویژه‌ی r و v، $X(t)=e^{rt}v$ جواب دستگاه $X'=AX$ است.

۱۲ حالت خاص: مقادیر ویژه‌ی مختلط

$\lambda = \alpha + \beta i$

A حقیقی

ضرایب حقیقی‌اند ⟸ اگر $\alpha + \beta i$ ریشه باشد، $\alpha - \beta i$ هم ریشه هست.

چند جمله‌ای مشخصه

⟸ چون ضرایب چند جمله‌ای حقیقی است اگر $\alpha + \beta i$ ریشه باشد، $\alpha - \beta i$ هم ریشه است (به کتاب دیگر سطحی مراجعه کنید ((:

$$\lambda = \alpha + \beta i \qquad v = a + bi$$

$$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i \qquad w = ?$$

$$Aw = \bar{\lambda} \bar{v}$$

$$Av = \lambda v \xrightarrow{\text{مزدوج}} \overline{Av} = \overline{\lambda v}$$

$$Aw = \bar{\lambda} w \xleftrightarrow{\text{حقیقی}} A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

$$\boxed{w = \bar{v}}$$

من تعمیم می‌شد اصلاً! : (حتی تعمیم می‌شود اثبات کرد.

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1) = \pm i \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

$$\lambda_1 = 1 + i \qquad \lambda_2 = 1 - i$$

← مقادیر ویژه (دو پاسخ :)

$$AV=(1+i)V \quad (AV=\lambda V \quad (A-\lambda I)V=0)$$

این چیه؟

۱۶ سه شنبه — آذر ۱۳۹۵ — Tuesday December 6 2016 — ۶ ربیع الأول

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1+i)v_1\\ (1+i)v_2\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{aligned}v_1+v_2&=v_1+iv_1\\ -v_1+v_2&=v_2+iv_2\end{aligned}\left\{\begin{aligned}v_2&=iv_1\\ -v_1&=iv_2\end{aligned}\right\}\div i$$

i^2

یعنی $v_1=iv_2$ ... تقسیم بر i کردیم شد

$$v_2=iv_1 \Rightarrow V=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V=\begin{pmatrix}1+0i\\ 0+1i\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}_{a}+i\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}_{b}$$

$$v=a+bi$$

$$\lambda_2=1-i$$

$$w=\bar{V}=\begin{pmatrix}1\\ \bar{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{aligned}\lambda_1&=1+i \quad V=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\\ \lambda_2&=1-i \quad W=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

$\alpha+\beta i$

یعنی اینطوری شد که اگر مقدار ویژه به صورت $a+bi$ شد بردار ویژه‌ش $a+bi$ شد لذا می‌توانیم بنویسیم اگر $\alpha-\beta i$ بردار ویژه‌ش $a-bi$ می‌شه و این همون چیزیه که ثابت کرد و من نفهمیدم!

$$w=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

پس بردار ویژه‌ها اینا هستند:

$$\left\{\begin{aligned}\lambda_1&=1+i \quad V=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\\ \lambda_2&=1-i \quad W=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

حل دستگاه $X'=AX$ (که روش معمول) برای مقدار ویژه‌های مختلط

$$X(t) = e^{rt} V$$

$$r = \alpha \pm \beta i \qquad v = a \pm bi$$

مختلط

$$\tilde{x}_1(t) = e^{(\alpha+\beta i)t}(a+bi)$$

$$\tilde{x}_2(t) = e^{(\alpha-\beta i)t}(a-bi)$$

اما جوابای خوبین حیف که مختلط هستند. کاریشون می‌کنیم که حقیقی بشند.

$$\tilde{x}_1(t) = e^{\alpha t} e^{\beta i t}(a+bi) = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big)(a+bi)$$

$$= \left(e^{\alpha t}\cos(\beta t)a - e^{\alpha t}\sin\beta t\, b\right) +$$

$$\left(e^{\alpha t}\cos(\beta t)b + e^{\alpha t}\sin\beta t\, a\right) i$$

$$\tilde{x}_2(t) = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t - i\sin\beta t\right)(a-bi)$$

$$x_1(t) = \frac{\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\cos\beta t\, a - e^{\alpha t}\sin\beta t\, b$$

$$x_2(t) = \frac{\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t)}{2i} = e^{\alpha t}\cos\beta t\, b + e^{\alpha t}\sin\beta t\, a$$

مثال: ادامه‌ی مثال قبلی

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1+i & v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 1-i & w = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{cases}$$

همه‌ی α,β تا اینجا
همینا رو هم اینجا که a, β
رو اسم گذاشتیم بیارم

$$\lambda_1 = 1+i \longrightarrow \alpha = \beta = 1$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1-i \Rightarrow \alpha = 1 \quad \beta = -1$$

$$w\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = e^t \cos t \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - e^t \sin t \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = e^t \cos t \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + e^t \sin t \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$AV = \lambda V$

۳) حالت خاص ـ مقدار ویژه ی تکراری

بردار ویژه

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$\boxed{x_1(t) = e^{\lambda t} V}$ متناظر با

$$x_2(t) = (tV + u)\, e^{\lambda t}$$

هر دو V : ((

$$x_1' = AX \qquad x_2' = (tV + u)(\lambda e^{\lambda t}) + V e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow x_2' = (\lambda t V + \lambda u + V) e^{\lambda t}$$

$$AX_2 = t e^{\lambda t} \underbrace{AV}_{\lambda V} + e^{\lambda t} A u$$

$$x_2' = AX_2 \xrightarrow{e^{\lambda t} \neq 0} \lambda t V + \lambda u + V = t \underbrace{AV}_{\lambda V} + A u$$

$$Au = \lambda u + V \longrightarrow (A - \lambda I) u = V$$

بردار ویژه

$$\begin{cases} (A - \lambda I) V = 0 \\ (A - \lambda I) u = V \end{cases}$$

بردار ویژه ی تعمیم یافته

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad x' = AX$

۱) مقادیر ویژه $\det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-3)+1=0 \qquad \lambda^2-4\lambda+4=0$$

$$\rightarrow \lambda_1=\lambda_2=2 \quad \begin{cases}(A-2I)v=0 & (1)\\ (A-2I)u=v & (2)\end{cases}$$

$$(1): (A-2I)v=0$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} \rightarrow v_1+v_2=0$$

$$v=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$(2): (A-\lambda I)u=v$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-u_1-u_2=1\\ u_1+u_2=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1,u_2\neq 0 \Rightarrow u=\begin{pmatrix}-0.5\\ -0.5\end{pmatrix}$$

$$x_1=e^{\lambda t}v=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$ پس

$$x_2=e^{\lambda t}(tv+u)=e^{2t}\begin{pmatrix}t-0.5\\ -t-0.5\end{pmatrix}$$

* تئوری دستگاه‌های $X'=AX$

۱) دستگاه $X'=AX$ به ازای هر $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ دارای n جواب مستقل خطی است.

اگر جواب‌های مستقل را $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ بنامیم.

هر جواب دیگر دستگاه به فرم $c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t)$ است.

۲) به ازای هر بردار $X_0 \in IR^n$ مسئله $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ جواب یکتایی دارد.

مثال ۱) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $X' = AX$ $X_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

۱) مقدار ویژه $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 - 3 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$$

۲) بردار ویژه $Au = 2u$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \end{bmatrix}$$

$$u_1 + 3u_2 = 2u_1 \Rightarrow u_1 = 3u_2 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AV = -2V \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v_1 \\ -2v_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 + 3v_2 = -2v_1$$

$$v_1 = -v_2 \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

۳) جواب‌های X_1 و X_2

$$X_1 = e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_2 = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

۴) جواب مسئله با شرط اولیه:

$$X(t) = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}3c_1 + c_2 = 4\\ c_1 - c_2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

$$X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

نکته: $A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ سهولیتا

به نام خدا

ode.1395.1@gmail.com تا شنبه

شماره دانشجویی + شماره سوال مدنظر (حداکثر ۳ تا)

mehr.sharif.ir/~nbagherpour/teaching/ODE

شروع جلسه ۲۹ آذر ۹۵

* دستگاه معادلات $X' = AX$ مرتبه دو

گام ۱) مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را با حل $\det(A - \lambda I) = 0$ می‌یابیم.

گام ۲ ۱) به ازای مقادیر ویژه‌ی یکتای $\lambda \in \mathbb{R}$ بردار ویژه‌ی متناظر را حساب می‌کنیم

جواب دستگاه به صورت $X(t) = e^{\lambda t} v$ تشکیل می‌شود.

بردار ویژه متناظر

باید حتماً غیر صفر باشد

۲) اگر مقادیر ویژه‌ی $\alpha \pm \beta i$ داشته باشیم، ترکیبی می‌دهیم:

$\lambda = \alpha + \beta i$ v: بردار ویژه
$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ $\bar{v}$: بردار ویژه

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde{x}_1(t) = e^{(\alpha+\beta i)t} v\\ \tilde{x}_2(t) = e^{(\alpha-\beta i)t}\bar{v}\end{array}\right.$$

مختلط

$$X_1(t) = \frac{\tilde{X}_1(t) + \tilde{X}_2(t)}{2}$$

$$X_2(t) = \frac{\tilde{X}_1(t) - \tilde{X}_2(t)}{2}$$

۲۳ سه شنبه
آذر ۱۳۹۵
Tuesday December 13

حالت ۳ توضیحات

۳) به ازای مقدار ویژه ی λ با دو بار تکرار داریم:

$$\lambda \longrightarrow (A-\lambda I)v = 0$$ بردار ویژه

چون v

$$(A-\lambda I)u = v$$ بردار ویژه تعمیم یافته

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{\lambda t} v \\ X_2(t) = (vt+u)e^{\lambda t} \end{cases}$$

مثال ۱:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$A = I \longrightarrow \det(A-\lambda I) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$AX = \lambda X \longrightarrow IX = 1X \longrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^{2\times 1}$$

پس $0 \neq X \in \mathbb{R}^{2\times1}$ برای A بردار ویژه است.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$X = x_1 v_1 + x_2 v_2$$

v_1 بردار ویژه‌ی ما می‌باشد

← ماتریس برای مقدار ویژه ی ۱ دو بردار ویژه ی مستقل v_1 و v_2 دارد.

گاهی با مقدار ویژه ی تکراری داریم و بردار ویژه اصلی را پیدا می‌کنیم پس چون تعداد به دست میاد. حالا دیگر فرق دارد و به کار با بردار ویژه تعمیم یافته نداریم.

$$\lambda = 1 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow X_1(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow X_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* پس در حالتی که مقادیر ویژه با درجه تکرار دو زمانی که دو بردار ویژه داشته باشد دو حالت می توانیم داشته باشیم:

حالت اول: وقتی V را حساب می کنیم یک جواب مستقل پیدا می شود. در این صورت حالت ③ توضیحات اتفاق می افتد و بردار ویژه تعمیم یافته.

این یک جواب دیگه هم اگر تکرار دهد $V_1 = \binom{1}{-1}$: I

مقادیر ویژه دارد $V = \binom{\alpha}{-\alpha}$ می بریم بردار ویژه تعمیم یافته.

II در حالتی که جواب V از $(A-\lambda I)V=0$ دو جواب مستقل بدست آید

داریم:

$$V=\binom{\alpha}{\beta} \begin{cases} V_1 = \binom{1}{0} & X_1 = e^{\lambda t} V_1 \\ V_2 = \binom{0}{1} & X_2 = e^{\lambda t} V_2 \end{cases}$$

* جالب بدونید که حالت II فقط زمانی اتفاق می افتد که ماتریس قطری هستند و در درایه قطری تکراری داریم اتفاق می افتد.

پس دیگه این جا سراغ بردار ویژه تعمیم یافته نمی ریم. همانا جواب ها ما را کافی است.

مثال ۲:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X' = AX$$

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$\det(A-\lambda I)=0$ (1.1 p6)

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 2 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2-1\right)-2(1-\lambda+1)=0$$

$$(1-\lambda)^3-(1-\lambda)-2(1-\lambda)-2=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1+3(1-\lambda)+2=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3-3\lambda^2+4 & \lambda+1\\ \hline -\lambda^3-\lambda^2 & \lambda^2-4\lambda+4\\ -4\lambda^2+4 & \\ 4\lambda^2+4 & \\ 0\;0 & \end{array}$$

$$(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+4)=0$$

$\lambda_1=1$ $\quad \lambda_2=\lambda_3=2$

$AV=-1\times V$ $\quad \lambda_1=-1$ (1 — 2 p6)

$$V=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

$$v_1+v_2+v_3=-v_1$$
$$2v_1+v_2-v_3=-v_2$$
$$-v_2+v_3=-v_3$$

$$\left\{\begin{array}{l}2v_1+v_2+v_3=0\\ 2v_1+2v_2-v_3=0\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}v_2=2v_3\\ v_2=2v_3\end{array}\right\} v_2=2v_3$$

$$\left.\begin{array}{l}2v_1+v_2+v_3=0\\ v_2=2v_3\end{array}\right\} v_1=-\frac{3}{2}v_3$$

$$\rightarrow V=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\alpha\\ 2\alpha\\ \alpha\end{pmatrix} \qquad V=\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$$

$$X_1(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$$

۲) $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ⟸ قطری ا‌ستاکر شود A

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ (حالت ۳)

$$(A-2I)u = 0$$

$-u_1 + u_2 + u_3 = 0$ $\quad u_2 + u_3 = 0$

$2u_1 - u_2 - u_3 = 0 \to u_1 = 0$

$-u_2 - u_3 = 0 \to u_2 + u_3 = 0$

$$(A-2I)w = u$$

$u = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix}$ $\quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} X_2(t) = e^{2t} u \\ X_3(t) = (ut + w)e^{2t} \end{cases}$$

w را حساب کنیم

$-w_1 + w_2 + w_3 = 0 \to$ ✓

$2w_1 - w_2 - w_3 = 1 \to w_1 = 1$

$-w_2 - w_3 = -1 \Rightarrow w_2 + w_3 = 1$

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0+1 \\ t+\frac{1}{2} \\ -t+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$tu + w$

* بررسی استقلال خطی

تعریف: اگر $X_1(t)$، ...، $X_n(t)$ جواب‌های دستگاه

$X' = AX$ باشند چنانچه رونسکین حاصل لذ کنار هم گذاردن جواب

وارون پذیر باشد آنگاه جواب های $X_1(t), \dots, X_n(t)$ مستقل هستند.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) & \cdots & X_n(t) \end{pmatrix}_{n\times n}$$

اگر $\det(\Phi(t)) \neq 0$ جواب ها مستقل اند

گوییم دستگاه ماتریس اساسی

اگر شرط استقلال خطی $(\det \neq 0)$ برقرار بود، $\Phi(t)$ را یک ماتریس اساسی گوییم.

* بررسی استقلال خطی

تعریف - اگر $X_1(t), \dots, X_n(t)$ جواب‌های جبلی دستگاه $X' = AX$ باشند،
چنانچه دترمینان ماتریس حاصل از کنار هم قرار گرفتن جواب‌ها وارون‌پذیر باشد.
آنگاه جواب‌های $X_1(t), \dots, X_n(t)$ مستقل هستند.

$$\Phi(t) = \left(X_1(t) \; X_2(t) \cdots X_n(t) \right)_{n\times n}$$

اگر $\det(\Phi(t)) \neq 0 \longrightarrow$ جواب‌ها مستقل‌اند

$\Downarrow$

ماتریس اساسی

اگر شرط استقلال خطی $(\det \neq 0)$ برقرار بود، $\Phi(t)$ را یک ماتریس اساسی دستگاه می‌گوییم.

* تعریف ۱: اگر $x_1(t), \dots, x_n(t)$، n جواب مستقل خطی برای دستگاه باشند $\Phi(t)=(x_1(t)\cdots x_n(t))$ یک ماتریس اساسی برای دستگاه است. اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی باشد، داریم:

$$x(t)=c_1x_1(t)+\dots+c_nx_n(t)=(x_1(t)\cdots x_n(t))\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

$$x(t)=\Phi(t)c$$

* تعریف ۲: برای $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$، e^A تعریف می‌شود.

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=I+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\cdots$$

* توجه: ماتریس $\Phi(t)=e^{At}$ یک ماتریس اساسی برای دستگاه $X'=AX$ با شرط $\Phi(0)=I$ است.

$$\Phi(t)=e^{At}=I+tA+\frac{t^2}{2}A^2+\frac{t^3}{3!}A^3+\cdots$$

$$\Phi'(t)=A+tA^2+\frac{t^2}{2}A^3+\cdots=A(I+tA+\cdots)$$

$$=A\,\Phi(t)$$

می‌دانیم ستون‌های Φ مستقل هستند، ستون‌های Φ جواب هستند. پس $\Phi'=A\Phi$ ①

$\Phi(0)=I$

* همچنین می‌دانیم Φ وارون‌پذیر است. ②

$\xrightarrow{①,②}$ Φ ماتریس اساسی است.

* حال مسئله $\begin{cases}X'=AX\\ X(0)=X_0\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم:

$$x(t)=\Phi(t)C=e^{At}C$$

$$x(0)=x_0 \Longrightarrow X(0)=I\times C=X_0 \to C=X_0$$

$$\boxed{X(t)=e^{At}X_0}$$

نمی‌دانیم e^{At} را از روی ماتریس A چگونه باید حساب کرد!

* برای e^{At} :

۱) ماتریس قطری :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

$$e^{Dt} = I + Dt + \frac{t^2}{2}D^2 + \frac{t^3}{3!}D^3 + \cdots =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2 t^2}{2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{d_n^2 t^2}{2} \end{bmatrix} + \cdots =$$

i ها $\xrightarrow{\text{داریم}}$

روی قطر عدد داریم بقیه جا صفر می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 1 + d_i t + \frac{d_i^2 t^2}{2} + \frac{d_i^3 t^3}{3!} + \cdots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d_i t)^n}{n!} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n t} \end{bmatrix}$$

۲) ماتریس A دارای n مقدار ویژه حقیقی متمایز باشد: (اگر ... باشد مختلط، بررسی نمی‌شود!)

$$Av_i = \lambda_i v_i \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longrightarrow (v_1, \dots, v_n)$$

تساوی ماتریسی $\rightarrow$ $$(Av_1 \;\; Av_2 \cdots Av_n) = (\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_n v_n)$$

$$A\underbrace{(v_1 \;\; v_2 \cdots v_n)}_{v} = (v_1 \cdots v_n)\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{D}$$

$$\Rightarrow Av = vD \longrightarrow A = vDv^{-1}$$

$$e^{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \qquad * (At)^n = ?$$

$$* \rightarrow (At)^2 = t^2 A^2 = t^2 vD\underbrace{v^{-1}v}_{I}Dv^{-1} = t^2 vD^2 v^{-1}$$

$$\vdots$$

به طور مشابه : $(At)^n = t^n v D^n v^{-1} \rightsquigarrow e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} v D^n v^{-1}$

$$e^{at} = v\Big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n D^n}{n!}}\Big)v^{-1} \Rightarrow e^{at} = v e^{Dt} v^{-1}$$

* مثال:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad e^{At} = ?$$

I: گام اول/ A را به زبانی که لازم داریم می‌نویسیم: $A = \vartheta D \vartheta^{-1}$

پس مقدار ویژه و بردار ویژه نیاز داریم:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda+1)(\lambda-4) + 6 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 2$$

$\lambda_1 = 1$: $(A - I)\vartheta_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \vartheta_1 = 0 \longrightarrow -2\vartheta_1 + 3\vartheta_2 = 0 \longrightarrow \vartheta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$: $(A - 2I)\vartheta_2 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \vartheta_2 = 0 \longrightarrow \vartheta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \vartheta = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

λ_1 $\qquad\qquad$ ϑ_1

$$\vartheta^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

II: گام دوم/ محاسبه e^{At}:

$$e^{At} = \vartheta e^{Dt} \vartheta^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

* دستگاه ناهمگن:

$$X' = AX + f(t)$$

روش اول- A با n مقدار ویژه حقیقی و متمایز:

$$\dots \longrightarrow A = \vartheta D \vartheta^{-1}$$

Subject:
Date:
No:

$$X' = \underbrace{PDP^{-1}X}_{Y} + f(t)$$

تغییر متغیر

$$\boxed{X = PY} \longrightarrow X' = PDY + f(t)$$

$$X' = PY' \longrightarrow PY' = PDY + f(t) \xrightarrow{P^{-1}} Y' = DY + \underbrace{P^{-1}f(t)}_{\tilde{f}(t)}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = \lambda_1 y_1 + \tilde{f}_1(t) \longrightarrow y_1 \checkmark \\ y_2' = \lambda_2 y_2 + \tilde{f}_2(t) \longrightarrow y_2 \checkmark \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n + \tilde{f}_n(t) \longrightarrow y_n \checkmark \end{array}\right\} Y\checkmark \longrightarrow X = PY \checkmark$$

* الگوریتم حل $X' = AX + f(t)$

۱) $A = PDP^{-1}$

۲) حل تک تک معادلات دستگاه $Y' = DY + \tilde{f}(t)$ که در آن $\tilde{f}(t) = P^{-1}f(t)$

۳) محاسبه X از $X = PY$

* مثال:

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3e^t + e^{2t} \\ 2e^t + e^{2t} \end{bmatrix}$$

مرحله ۱:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

مرحله ۲:

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3e^t + e^{2t} \\ 2e^t + e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^t \\ \cancel{6e^t} + 3e^{2t} - \cancel{6e^t} - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$y_1' = y_1 + e^t \quad (1)$$

$$y_2' = 2y_2 + e^{2t} \quad (2)$$

[illegible]:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

$$\xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{عامل}} e^{\int a(x)dx} \quad \ldots$$

PONIX notebook

(۱) $y_1' - y_1 = e^t \xrightarrow[= e^{-t}]{\times e^{\int -1\, dt}} \underbrace{y_1' e^{-t} - e^{-t} y_1}_{} = 1$

$\longrightarrow (y_1 e^{-t})' = 1 \longrightarrow y_1 e^{-t} = t + c_1 \longrightarrow \boxed{y_1 = (t + c_1) e^t}$

(۲) $y_2' - 2y_2 = e^{2t} \xrightarrow{\times e^{-2t}}$

$(y_2 e^{-2t})' = 1 \longrightarrow y_2 e^{-2t} = t + c_2 \longrightarrow \boxed{y_2 = (t + c_2) e^{2t}}$

مرحله ۳:

$$X = VY = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (t+c_1)e^t \\ (t+c_2)e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3t + 3c_1)e^t + (t + c_2)e^{2t} \\ (2t + 2c_1)e^t + (t + c_2)e^{2t} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

این جواب عمومی است. می‌تواند مسئله شرط اولیه هم داشته باشد.

شرط: $X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 3c_1 + c_2 \\ 2c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases} \longrightarrow$$

با جایگذاری، جواب خاص X نیز بدست می‌آید.

ـ روش دوم: ماتریس A دلخواه:
(تبدیل لاپلاس)

$$\begin{cases} X' = AX + f(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

* حتماً لازم داریم. ش.ا در نقطه صفر

۱) گرفتن تبدیل لاپلاس:

هست میگی ۱: k

$$L\{X(t)\} = \mathcal{X}(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} L\{X'(t)\} = s\,\mathcal{X}(s) - \overset{X_0}{X(0)} \\ L\{f(t)\} = F(s) \end{array}\right\} \Rightarrow s\mathcal{X} - X_0 = A\mathcal{X} + F(S)$$

Subject
Date   No

۲) عکس لاپلاس جواب:

$$(sI - A)X = F(s) + X_0$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}(F(s) + X_0)$$ $(s \neq \lambda_i)$

$sI - A$ نقاط به ازای مقادیر ویژه وارون‌پذیر نیست

۳) لاپلاس وارون و محاسبه $x(t)$

مثال :*

$$x' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 3e^t + e^{2t} \\ 2e^t + e^{2t} \end{bmatrix} \quad , \quad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L\{x(t)\} = \Phi(s) \\ L\{x'(t)\} = s\Phi(s) - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \end{array} \right. \Rightarrow (sI - A)\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s-2} \\ \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & -3 \\ 2 & s-4 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \begin{bmatrix} s-4 & 3 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 - 3s + 2} \begin{bmatrix} s-4 & 3 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}}_{(sI-A)^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s-2} + 2 \\ \underbrace{\frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2} + 1}_{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} \begin{bmatrix} \frac{4s - 7 + 2(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)}(s-4) + 3\beta \\ \frac{4s - 7 + 2(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)}(-2) + (s+1)\beta \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ جواب قبلی :)

PONIX notebook

$$X(0) = c_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}3c_1 + c_2 &= 4\\ c_1 - c_2 &= 0\end{aligned}\right\} \rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

$$X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

نکته: $A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ سوال‌ها

به نام خدا

تا شنبه ode.1395.1@gmail.com

شماره دانشجویی + شماره سوال مدنظر (حداکثر ۳ تا)

mehr.sharif.ir/~nbagherpour/teaching/ODE

شروع جلسه ۱۹ آذر ۹۵

* دستگاه معادلات $X' = AX$ مرور

گام ۱) مقادیر ویژه‌ی ماتریس A با حل $\det(A - \lambda I) = 0$

گام ۲) به ازای مقدار ویژه‌ی حقیقی $\lambda \in \mathbb{R}$ بردار ویژه‌ی متناظر را حساب می‌کنیم

جواب دستگاه به صورت $X(t) = e^{\lambda t} v$ تشکیل می‌شود.

بردار ویژه‌ی متناظر

سوال: حتی عضو ... نباشد

۳) اگر مقادیر ویژه‌ی $\alpha \pm \beta i$ داشته باشیم ترکیب می‌دهیم:

$\lambda = \alpha + \beta i$ $\quad v$: بردار ویژه

$\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ $\quad \bar{v}$: بردار ویژه

$$\left\{\begin{aligned}\tilde{x}_1(t) &= e^{(\alpha+\beta i)t} v\\ \tilde{x}_2(t) &= e^{(\alpha-\beta i)t} \bar{v}\end{aligned}\right.$$

مختلط

$$X_1(t) = \frac{\tilde{X}_1(t) + \tilde{X}_2(t)}{2}$$

$$X_2(t) = \frac{\tilde{X}_1(t) - \tilde{X}_2(t)}{2}$$

حالت ۳ توضیحات

۳) به ازای مقدار ویژه‌ی λ با دو بار تکرار داریم:

$$\lambda \longrightarrow (A - \lambda I)V = 0$$ بردار ویژه

همون V $$(A - \lambda I)u = V$$ بردار ویژه‌ی تعمیم یافته

$$\begin{cases} X_1(t) = e^{\lambda t} v \\ X_2(t) = (vt + u)e^{\lambda t} \end{cases}$$

مثال ۱:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$A = I \longrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$AX = \lambda X \longrightarrow IX = 1X \longrightarrow \forall X \in R^{2\times 1}$$

پس $\forall\, 0 \neq X \in R^{2\times 1}$ برای A بردار ویژه است.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{V_2}$$

$x_1, x_2 \in R$

V_1 بردار ویژه‌ی ما باشه

$$X = \underbrace{x_1}V_1 + \underbrace{x_2}V_2$$

← ماتریس برای مقدار ویژه‌ی ۱ دو بردار ویژه‌ی مستقل V_1 و V_2 دارد.

گاهی با مقدار ویژه‌ی تکراری هم دو بردار ویژه‌ی اصلی پیدا کنیم پس جواب به دست میاد. حالا دیگه فرق داره چون که به بردار ویژه‌ی تعمیم یافته نداریم.

$$\lambda = 1 \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* پس در حالتی که ماتریس مقدار ویژه با درجه تکرار دو داشته باشد (ریشه مکرر) دو حالت می توان داشت:

حالت اول: وقتی V را حساب می کنیم یک جواب مستقل پیدا می شود، داریم

صحبت حالت ۳ توضیحات اتفاق می افتد در مقدار ویژه تعمیم یافته...

این یک جواب دیگه هم اگر تکرار داشت مقدار ویژه دارات مفهوم بردار ویژه تعمیم یافته.

$$V=\begin{pmatrix}\alpha\\-\alpha\end{pmatrix} \rightarrow \text{I}: \quad V_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \text{ این یک}$$

II در حالتی که جواب V از $(A-\lambda I)V=0$ دو جواب مستقل داشته باشد

داریم:

$$V=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \begin{cases} V_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & X_1=e^{\lambda t}V_1 \\ V_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & X_2=e^{\lambda t}V_2 \end{cases}$$

* حالیه بدونید که حالت II فقط در ازای ماتریس هایی که قطری هستند در دیاگونال قطری تکراری دارند اتفاق می افتد.

پس دیگه این جا به دنبال بردار ویژه تعمیم یافته نمی ریم. فقط جواب ها رو گرفتیم بسه.

مثال ۲:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix} \qquad X'=AX$$

$$\det(A)=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix} \quad -a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$\det(A-\lambda I)=۰$

(۱.۱ p6)

۲۵ پنج شنبه
آذر ۱۳۹۵

Thursday
December 15

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ ۲ & 1-\lambda & -1\\ ۰ & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left((1-\lambda)^{۲}-1\right)-۲(1-\lambda+1)=۰$$

$$(1-\lambda)^{۳}-(1-\lambda)-۲(1-\lambda)-۲=۰$$

$$\lambda^{۳}-۳\lambda^{۲}+۳\lambda-1+۳(1-\lambda)+۲=۰$$

$$\lambda^{۳}-۳\lambda^{۲}+۴=۰ \Longrightarrow \lambda_1=-1$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^{۳}-۳\lambda^{۲}+۴ & \lambda+1 \\ \hline -\lambda^{۳}-\lambda^{۲} & \lambda^{۲}-۴\lambda+۴ \\ -۴\lambda^{۲}+۴ & \\ ۴\lambda^{۲}\mp۴ & \\ ۰\;۰ & \end{array}$$

$$(\lambda+1)(\lambda^{۲}-۴\lambda+۴)=۰$$

$\lambda_1=1$ $\quad\lambda_2=\lambda_3=۲$

۲۶ جمعه
آذر ۱۳۹۵

Friday
December 16

$AV=-1\times V$ $\quad \lambda_1=-1$ (۱ – ۲ p6)

$$V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

$$v_1+v_2+v_3=-v_1$$
$$۲v_1+v_2-v_3=-v_2$$
$$-v_2+v_3=-v_3$$

$$\left.\begin{array}{l}۲v_1+v_2+v_3=۰\\ ۲v_1+۲v_2-v_3=۰\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}v_2=۲v_3\\ v_2=۲v_3\end{array}\right\} v_2=۲v_3$$

$$\left.\begin{array}{l}۲v_1+v_2+v_3=۰\\ v_2=۲v_3\end{array}\right\} v_1=-\frac{۳}{۲}v_3$$

$$\longrightarrow V=\begin{pmatrix}-\frac{۳}{۲}\alpha\\ ۲\alpha\\ \alpha\end{pmatrix} \qquad V=\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$X_1(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}-۳\\۴\\۲\end{pmatrix}$$

۲) $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ ⟸ تکراری است که بردار A

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ (حالت ۳)

$(A - 2I)\, u = 0$

$-u_1 + u_2 + u_3 = 0$ $u_2 + u_3 = 0$

$2u_1 - u_2 - u_3 = 0 \rightarrow u_1 = 0$

$-u_2 - u_3 = 0 \rightarrow u_2 + u_3 = 0$

$(A - 2I)\, w = u$

$u = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} X_2(t) = e^{2t} u \\ X_3(t) = (ut + w) e^{2t} \end{cases}$$

w را حساب کنیم

$w = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ 1-\gamma \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$-w_1 + w_2 + w_3 = 0 \rightarrow$ ✓

$2w_1 - w_2 - w_3 = 1 \rightarrow w_1 = 1$

$-w_2 - w_3 = -1 \Rightarrow w_2 + w_3 = 1$

$X_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x_3 = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 + 1 \\ t + \frac{1}{2} \\ -t + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$

$tu + w$

* بررسی استقلال خطی

تعریف: اگر $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ جواب‌های دستگاه $X' = AX$ باشند چنانچه ترکیب خطی آن‌ها حاصل کنار هم قرار دادن جواب

ولعدن پذیر باشد آنگاه جواب های $X_1(t), \dots, X_n(t)$ مستقل هستند.

$$\Phi(t) = \big(X_1(t)\ X_2(t)\ \dots\ X_n(t)\big)_{n\times n}$$

لازم نیست اگر $\det(\Phi(t)) \neq 0$ جواب ها مستقل اند

ماتریس اساسی

اگر شرط استقلال خطی ($\det \neq 0$) برقرار بود، $\Phi(t)$ را یک ماتریس اساسی.

به نام خدا ▼ شروع جلسه ی ۴ دی

صفحه ی فاز _ پایداری

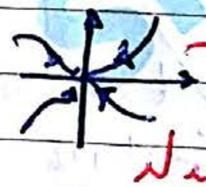
که اگر با تغییر محدود نقطه ی شروع جواب به اندازه ی محدود تغییر کند، سیستم را در نقطه ی شروع X_0 پایدار می گوییم.

$X_0 \to X(t)$

$\tilde{X}_0 \to \tilde{X}(t)$

$$|x-\tilde{X}_0|<\delta \xrightarrow{\exists \epsilon} \forall t>0 \quad |X(t)-\tilde{X}(t)|<\epsilon$$

* یک روش برای بررسی پایداری سیستم رسم نمودار منحنی های جواب (الگوی) بر حسب $x(t)$ است:



ناپایدار
از صفحه بیرون می زند

پایدار
از هر جا شروع کنیم به سمت مبدا

* رسم صفحه ی فاز برای $X' = AX$

$A \in R^{2\times 2}$

برای رسم صفحه‌ی فاز ابتدا مسأله را حل کنید!

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \longrightarrow X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$y(t)$ برحسب $x(t)$ در صفحه

حالت اول:

« دو مقدار ویژه‌ی حقیقی متمایز و هم علامت »

مقدار ویژه‌ی بزرگ

$\lambda_1 > \lambda_2 > 0 \qquad X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1$

$X_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_2$

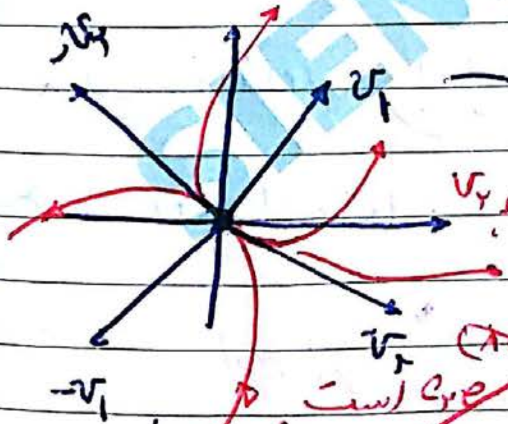
$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

$$= e^{\lambda_1 t}\big(\underbrace{c_1 V_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} V_2}\big)$$ مقدار منفی

$$y(t) = c_1 V_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} V_2$$

① $t \to +\infty \quad y(t) \Rightarrow c_1 V_1$

② $t \to +\infty \quad e^{\lambda_1 t} \to +\infty$



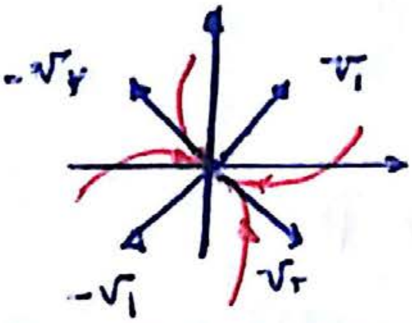
$\longrightarrow c_1, c_2 > 0$

~~V_2 در $t \to 0$ مماس است~~

~~زیرا $c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} V_2$ غالب است~~

$c_1 < 0, \; c_2 > 0$

(منبع ناپایدار)



(ناپایدار)

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \qquad AX = X'$$

$$\det(A-\lambda I)\ (\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 \Rightarrow$ | $\lambda_1 = 1 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X = X$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = x_1 \\ 3x_2 = x_2 \end{cases} \quad x_2 = 0$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

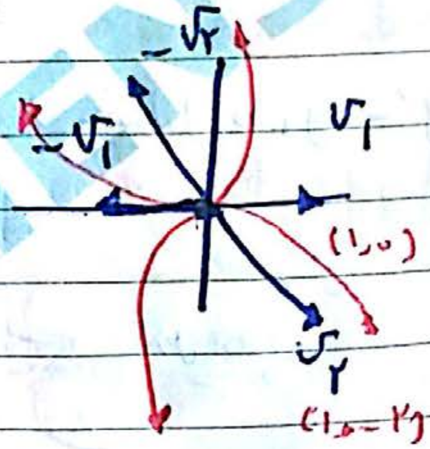
$\lambda_2 = 3 \begin{cases} x_1 - x_2 = 3x_1 \\ 3x_2 = 3x_2 \end{cases}$

$2x_1 = -x_2 \Rightarrow$

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



دقت که اینجا یکی صفر باشند و $\lambda_2 > \lambda_1$ بیشتر وزن

(احتیاط)

اندازه جواب به سمت $+\infty$ می رود و جهت جواب به سمت v_2

با سرعت تیزی بزرگتر است.

حالت دوم - دو مقدار ویژه‌ی متمایز: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$X(t) = \left(c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}\right)$$

$$= e^{\lambda_2 t}\left(c_1 v_1 e^{\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{-}t} + c_2 v_2\right)$$

۱) جهت جواب $t\to\infty$ به سمت v_2 است.

۲) اندازه‌ی جواب $t\to\infty$ به سمت ∞ است

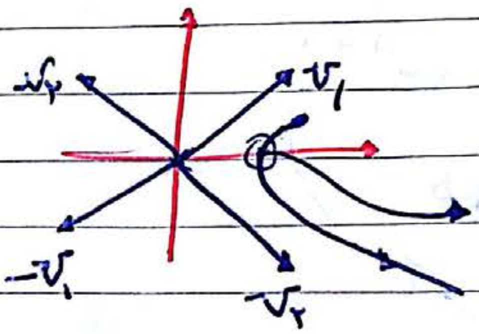
* ۳) روند افزایش اندازه ثابت نیست، بلکه دارای اکسترمم است.

$$P(t) = |X|^2 = |x(t)|^2 + |y(t)|^2$$

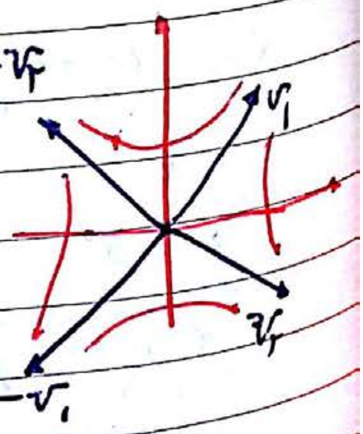
وجود t^* در آن $P'(t^*)=0$ شود

$$u(t) = c_1 v_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2 v_2$$

$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0 \longrightarrow \frac{d(u)^2}{dt} => \quad \exists t^* > 0 \quad \frac{du^2}{dt} = 0$



$$t^* = \frac{d|u|}{dt} = 0$$



تا نزدیک مبدا، [illegible]

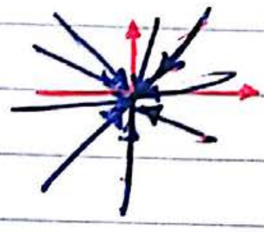
حالت سوم ـ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda<0$ (ماتریس قطری)

$$X_1 = e^{\lambda t}V_1 \qquad X_2 = e^{\lambda t}V_2$$

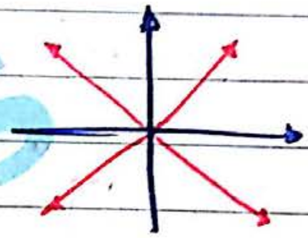
$$X(t) = (c_1V_1 + c_2V_2)\,e^{\lambda t} = \begin{bmatrix}\alpha e^{\lambda t}\\ \beta e^{\lambda t}\end{bmatrix} \begin{matrix}\leftarrow x(t)\\ \leftarrow y(t)\end{matrix}$$

شرط اولیه (c_1 , c_2)

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\beta}{\alpha}$$ وابسته به V_1 , V_2 و



$\lambda<0$



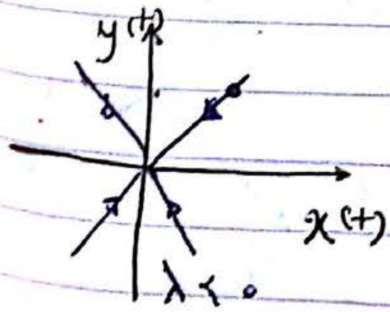
$\lambda>0$

«به نام خدا» صفحه‌ی فاز: دستگاه $X'=AX$ ، $A=R^{2\times 2}$ (ماتریس)

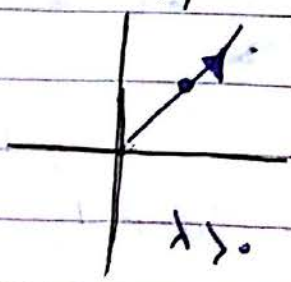
حالت سوم ـ مقدار ویژه‌ی تکراری و ماتریس قطری (I) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \rightarrow X_1(t)=e^{\lambda t}V_1 \qquad X_2(t)=e^{\lambda t}V_2$$

$$X(t)=(c_1V_1+c_2V_2)\,e^{\lambda t}=\begin{pmatrix}\alpha e^{\lambda t}\\ \beta e^{\lambda t}\end{pmatrix} \begin{matrix}\leftarrow x(t)\\ \leftarrow y(t)\end{matrix}$$



$\lambda<0$



$\lambda>0$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\beta}{\alpha}$$ شیب خط

مثال:

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} X \qquad \lambda = 2$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

$$AX = 2X \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{2t} \qquad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

مسیر اولیه

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad \frac{y(t)}{x(t)} = 1$$

حالا شکل صفحه فاز بود:

$\lambda = 2 > 0$

II) مقدار ویژه ی تکراری در ماتریس غیر قطری:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

⇐ ماتریس تک رشته ⇐ بردار ویژه ی تعمیم یافته:

$$(A - \lambda I)u = 0$$
$$(A - \lambda I)V = u$$

$$X_1(t) = e^{\lambda t} u$$

$$X_2(t) = e^{\lambda t}(tu + v)$$

$$X(t) = \underbrace{(c_1 u + c_2 t u + c_2 v)}_{u(t)} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

این اسمش نسبت به u نیادرست u برداره دیگه‌یا! ← $u(t)$

این دیگه این رو داره به t بستگی داره نه کمیتی!

$$u(t) = c_1 u + c_2 v + c_2 t u$$

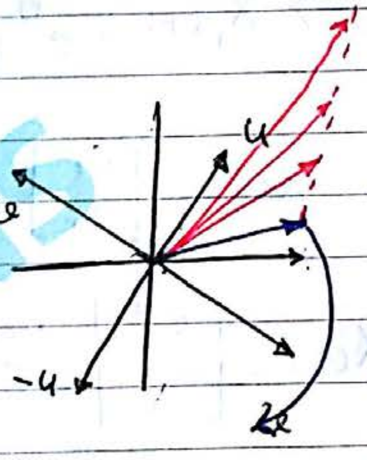
در جهت u!

1) @ $t=0$ $\quad u(0) = c_1 u + c_2 v$

2) $t\uparrow$ $\quad u \longrightarrow u(0) + c_2 t u$

3) $t \to \infty$ $\quad (\;)v + (\infty)u$

منطبق u به شدت عمل می‌کنند



$c_1 u + c_2 v$

و کلا میریم در راستای u!

حالا $u(t)$ رو کشیدیم و حالا $X(t)$ رو بکشیم که $X(t) = u(t) e^{\lambda t}$

است $X(t) = u(t) e^{\lambda t}$

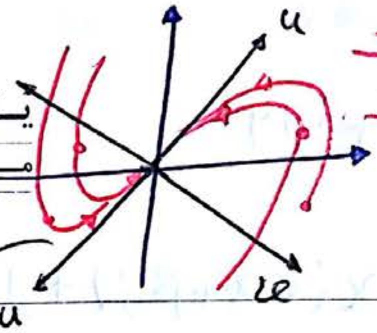
اگر که $\lambda < 0$ باشد داریم:

$\|X(t)\| \downarrow$

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$$

Scanned by CamScanner

۱۸ یک‌شنبه
مهر ۱۳۹۵
Sunday October



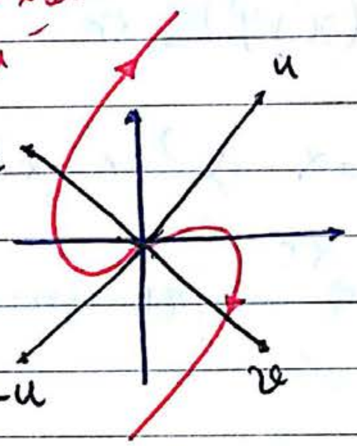
اینا به $+v$ هست

به راستای $-u$ مماس هستن.

اینا عمود بر هم رسم شدن در اثر ...

اینا به سمت $-v$ هستن برا $+u$ مماس هستن

اگر که $\lambda<0$ باشد داریم :



حالت چهارم:

$$\lambda = \alpha \pm \beta i$$

فقط ماتریسی که به این فرم باشه رو ما بررسی می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$X' = AX \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= -\beta x + \alpha y \end{aligned}$$

حالا این جا چون زندگی سخت شده رابطه بین (t,r) و (t,θ) رو پیدا می‌کنیم به جای مدل‌های قبلی که بودن:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (2)$$

این البته ترین مختصات قطبی‌ها

(1) $\xrightarrow{d/dt}$

$$2rr' = 2xx' + 2yy'$$

$$rr' = xx' + yy' = x(\alpha x + \beta y) + y(-\beta x + \alpha y)$$

$$= \alpha x^2 + \beta xy - \beta xy + \alpha y^2 = \alpha(x^2+y^2) = \alpha r^2$$

$$\Rightarrow rr' = \alpha r^2 \xRightarrow[r \neq 0]{} r' = \alpha r \Rightarrow \frac{r'}{r} = \alpha \Rightarrow \ln r = \alpha t + c$$

$$\Rightarrow r = ke^{\alpha t} \Rightarrow r(t) = ke^{\alpha t} \Rightarrow \boxed{r(t) = r(0) e^{\alpha t}}$$

بسته به $r(0)$ ، k پیدا می‌شود که [illegible]

$$k = r(0)$$

(2)

$$\xrightarrow[d/dt]{} \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow (1+\tan^2\theta)\,\theta' = \frac{y'x - x'y}{x^2}$$

$$= \frac{(-\beta x + \alpha y)x - (\alpha x + \beta y)y}{x^2} = \frac{-\beta x^2 + \alpha xy - \alpha xy - \beta y^2}{x^2}$$

$$= -\beta \frac{x^2+y^2}{x^2} \Rightarrow (1+\tan^2\theta)\,\theta' = -\beta \frac{x^2+y^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\,\theta' = -\beta \cancel{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \Rightarrow \theta' = -\beta$$

$$\Rightarrow \theta = -\beta t + \gamma$$

$$\theta(0) = \gamma \longrightarrow \theta(t) = -\beta t + \theta(0)$$

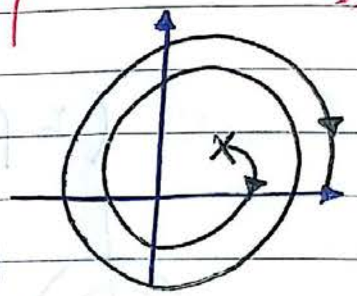
$$\begin{cases} r(t) = r(0) e^{\alpha t} \\ \theta(t) = -\beta t + \theta(0) \end{cases}$$

← وضعیت دقیق خطوط فاز وابسته به علامت α و β است. بنابراین گونه به دو حالت زیر توجه می‌کنیم

1) $\alpha>0$ و $\beta>0$

$\alpha>0 \quad t\uparrow \; r\uparrow$
$\beta>0 \quad t\uparrow \; \theta\downarrow$
→ $t\uparrow \; r\uparrow \; \theta\downarrow$ جهت منفی مثلثاتی ⇐ ساعتگرد

$\alpha,\beta>0$



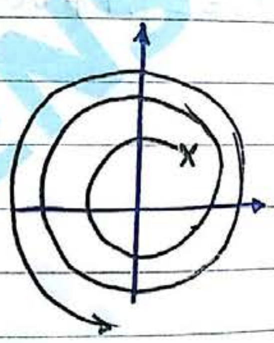
ناپایدار

2) $\alpha>0$ و $\beta<0$

$\alpha>0 \quad t\uparrow \; r\uparrow \; / \; \beta<0 \quad t\uparrow \; \theta\uparrow$

$t\uparrow \; r\uparrow \; \theta\uparrow$ جهت مثبت مثلثاتی

$\alpha>0$ و $\beta<0$



ناپایدار

بعد برای جهت ۴ ترتیب α اینا نشانشون شروع به کم شدن می‌کنن.

$\alpha<0$ و $\beta>0$

کاهش طول
ساعتگرد

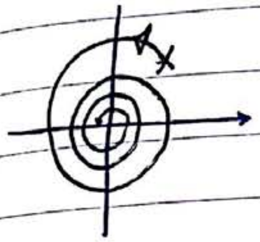
مثال: نکته: یاد بگیریم α و β را از حالت دارش

به درستی بیا دوره بیاد اینه $\alpha \pm \beta i$ هستش
β مثبت باشه
خوب بفهمیم ←

$A=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha=\beta=-1$

$A=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{bmatrix}$

$\alpha<0 \quad \beta<0$



$r\downarrow$ پادساعتگرد $\theta\uparrow$

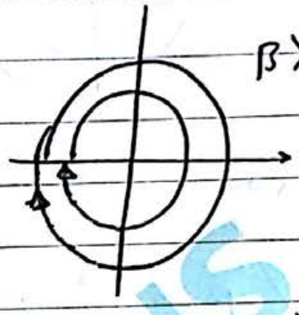
حالت چهارم ۲-)

$\lambda=\pm\beta i$

ساعتگرد : $\beta>0$ $\theta\downarrow$

$A=\begin{bmatrix}0&\beta\\-\beta&0\end{bmatrix}$

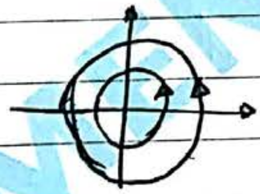
$r(t)=r(0)e^{\alpha t}=r(0)$



$\theta(t)=-\beta t+\theta(0)$

جهت + مثلثاتی ، پادساعتگرد ، $\beta<0$

$\theta\uparrow$



فصل ۷ مرور)

۱) حل دستگاه $X'=AX$ برای A، 2×2 , 3×3

* حل معادله $\begin{cases}X'=AX\\X(0)=X(0)\end{cases}$ همون مسائل رو دوره می‌کنیم

2) محاسبه ی ماتریس e^{At} (A قطری یا A با n مقدار ویژه متمایز)

3) دستگاه ناهمگن ← A دارای n مقدار ویژه حقیقی متمایز باشد

XX

شبیه همونی که حل شده بیارد!

این خیلی مهمه که بیارد!

تبدیل لاپلاس سه‌اشو نخونید، لازم نیست یاد بگیرید.

۲۲ پنج شنبه

مهر ۱۳۹۵

Thursday
October 13 20

۱۱ محرم

۴م صفحه فاز *** بسیار مهم! ۹۹٪ میاد!

λ_1, λ_2 هم علامت، $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ،

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda = \alpha \pm \beta i$

$\lambda = \pm \beta i$

این که شرط اولیه داشته باشیم!

اینها رو یاد بگیرید!

$$** \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

«به نام جی بابان»

سلام!

خب! همونطور که می بینید moagin هم مثل اکثر چیزهایی که تو دنیا هستن تموم شد و رفت. اکثر چیزهای دنیا هم بروزی میرن و تموم می شن و امروز هم تقریباً پایان moagin بود. رودکی:

زندگی صحنه یکتای هنرمندی ماست
هر کسی نغمه‌ی خود خواند و از صحنه رود
صحنه پیوسته به جاست
خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد.

یکم سر این بیت دارین فکر کنید
عشق هست البته.
خدمت به خلق
خیلی خوبه
دیگران ازش
یادشون نمی‌مونه
یا متوجه
نمی‌شن!

این ترم هم برای خودمن یکم زود تموم شد. حدود ۳٫۵ ماه گذشت. اگر ۸۰ سال هم حساب کنیم کل عمرمون میشه حدود ۲۰۰ تا دیگه از این ۳٫۵ ماه‌ها. البته اگر تا ۵۰ سالگی مفیدش باشه حدود ۱۰۰ تا دیگه از این ۳٫۵ ماه‌های مفید داریم. چقدر کم :(

به هر حال امیدوارم خاطره‌ی خوبی از این کانال در ذهنتون مونده باشه :)

دلشاد باشید

۹ دی ۱۳۹۵